# ANNALES

DE LA

# SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-QUATRIÈME, 1950

SÉRIE I

## SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

13 DÉCEMBRE 1950

*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1950

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 40 frs

# TABLE DES MATIÈRES

Session du 26 octobre 1950, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**


PAGES

Sur les points de Steiner et de Tarry, par M. V. Thébault ..... 131

Sur les groupes de parties d'un demi-groupe, par M. R. Ballieu ..... 139

Les solutions infiniment voisines des équations récurro-différentielles, par M. R.H. Germay ..... 148

Sur une propriété de certains polynômes d'Appell, par M. F. Ceschino 154

Sur une méthode de résolution de certaines équations intégrales dont le noyau est une fonction irrationnelle, par M. M. Parodi ..... 156

Sur l'équation différentielle de la fonction de Bessel du troisième ordre, d'indices nuls, par MM. P. Humbert et P. Delerue ..... 160

Sur une généralisation de la transformation de Hankel, par M. R.P. Agarwal ..... 164


DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**


La récession des nébuleuses extra-galactiques (6e partie), par M. P. Drumaux ..... 169

Contribution à l'étude du spectre Raman de la molécule $CD_3$-$CD_2$ H, par MM. R. Van Riet et M. de Hemptinne ..... 177

Etude au spectromètre de masse de la décomposition du Germane sous l'influence du bombardement électronique, par MM. M. Nève de Mévergnies et J.M. Delfosse ..... 188

Quelques phénomènes rares dans les émulsions photographiques exposées au rayonnement cosmique, par MM. L. Gillon, F. Gillain et A. Melin ..... 196

Table des Matières du tome 64e ..... 201



Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

| | |
|---|---|
| *en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg* | 70 fr. |
| *dans les autres pays* | 120 fr. |

SESSION DU 26 OCTOBRE 1950
A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

# Sur les points de Steiner et de Tarry

PAR

Victor THEBAULT
Tennie (France)

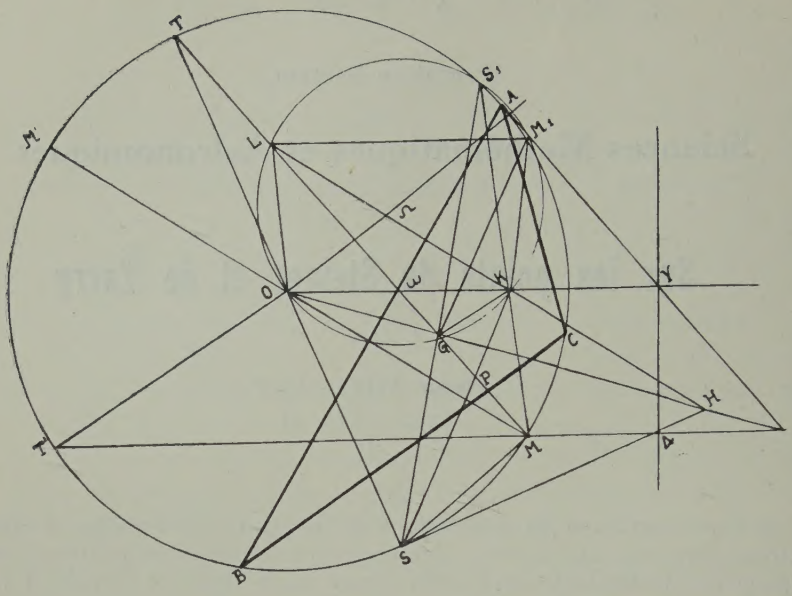
L'ellipse maximum (E) circonscrite à un triangle $t \equiv ABC$ (Ellipse de STEINER circonscrite) rencontre le cercle circonscrit (0) à celui-ci en un quatrième point S (point de STEINER) diamétralement opposé sur le cercle (0) au point T (point de TARRY). (1)

De nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer J. NEUBERG, H. BROCARD, TARRY, LEMOINE, etc., ont consacré des études à ces points S et T et on ne saurait affirmer si ce qu'on peut trouver à leur sujet est inédit. Cependant, l'application des propriétés de l'orthopôle d'un diamètre du cercle (0), par rapport à $t$, d'origine plus récente et qui ne paraît pas avoir été employée systématiquement à ces figures, permet de retrouver et de compléter des théorèmes obtenus souvent par le calcul et peut-être aussi d'en ajouter de nouveaux. C'est l'objet de la présente note dans ses développements élémentaires et parfois succincts.

NOTATIONS — Soient un triangle $t \equiv ABC$, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$), d'orthocentre H, inscrit à un cercle (O), de centre O et de rayon R; G, K et $\omega$ le barycentre, le point de LEMOINE et le centre du cercle de BROCARD ($\omega$) de diamètre OK; M le foyer de la parabole de KIEPERT du triangle anticomplémentaire $t_1$, inscrite au quadrilatère complet $(Q) \equiv (t, \Delta)$, $\Delta$ désignant la droite de LEMOINE (polaire de K pour le cercle circonscrit à $t$); V et W les centres isodynamiques.

1. — A. RAPPEL DE PROPRIÉTÉS CONNUES. — La droite MG qui joint le foyer de la parabole de KIEPERT du triangle $t_1$ au barycentre de $t$, passe par le centre $\omega$ du cercle de BROCARD de $t$, par le point

(1) STEINER, *Journal de Crelle*, t. LXVII-237; *Œuvres complètes*, t. II-691. — TARRY, *Zeitschrift*, t. XIV-33.




de TARRY T (1) et par le point P situé au tiers de la distance KS du point de LEMOINE au point de STEINER (2)

B. THÉORÈME. — *Dans un triangle t, la droite qui joint le foyer de la parabole de* KIEPERT *au barycentre passe au milieu de la distance du point de* STEINER *à l'orthocentre et par le symétrique de celui-ci par rapport au point de* LEMOINE.

En effet, il est clair que les triangles $t$ et HTS ont même barycentre G; la droite MG qui passe par le foyer de la parabole de KIEPERT de $t$ contient donc le milieu Q de HS. D'autre part, le théorème de MENELAÜS appliqué au triangle HKS coupé par la transversale MG qui rencontre HK en H', donne

$$\frac{H'K}{HS} \cdot \frac{QH}{QS} \cdot \frac{PS}{PK} = -1 ; \text{ et } KH = -KH',$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

COROLLAIRE. — *Dans un triangle, la droite qui joint le point de* STEINER *au barycentre passe au milieu de la distance de l'orthocentre au point de* TARRY.

---

(1) E. CESARO, *Nouvelles Annales*, 1887-224.

(2) R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1923 — 260.

**2.** — THÉORÈME. — *Dans un triangle t, le centre du cercle circonscrit, le barycentre, le symétrique du point de* TARRY *par rapport à la droite d'*EULER *et le foyer de la parabole de* KIEPERT *du triangle anticomplémentaire sont situés sur un même cercle tangent au diamètre de* BROCARD.

Si on désigne par T′ le symétrique du point de TARRY T par rapport à la droite d'EULER OG de *t*, les diagonales OM et GT′ du quadrangle MGOT′, qui rencontrent les droites MG et OT′ sous des angles égaux aux angles à la base du triangle isoscèle OMT, sont antiparallèles par rapport à celles-ci. D'autre part, le point de STEINER S et le foyer M de la parabole de KIEPERT de $t_1$ se confondent avec les orthopôles du diamètre de BROCARD $HK_1$ et de la droite d'EULER HG du triangle $t_1$ par rapport à celui-ci; l'angle des droites TS et TM et, par suite, ceux des droites T′O et T′G, MO et MG, est égal à celui des droites $HK_1$ et HG, c'est-à-dire à l'angle θ du diamètre de BROCARD OK et de la droite d'EULER OG de *t*, ce qui achève d'établir la proposition.

COROLLAIRE. — *Le côté* T′M *du quadrilatère complet dérivé du quadrangle* MGOT′ *est parallèle au diamètre de* BROCARD *du triangle et et le sommet* (T′M, GO) ≡ X *se confond avec le symétrique du foyer de la parabole de* KIEPERT *du triangle* $t_1$ *par rapport à la droite de* LEMOINE Δ *du triangle t.*

En effet, la symétrie des points T et T′, par rapport au diamètre OG du cercle (O), entraîne celle de T′ et du point M′ diamétralement opposé à M sur (O) par rapport à OK, de sorte que le côté T′M du quadrangle MGOT′ est parallèle au diamètre de BROCARD et perpendiculaire à la droite de LEMOINE Δ de *t*. De plus, la parabole de KIEPERT dont il est question ayant pour directrice OG est inscrite au quadrilatère complet (*t*, Δ) et les points M et (OG, T′M) ≡ X sont symétriques par rapport à Δ.

**3.** — THÉORÈME. *Dans un triangle t, le centre du cercle circonscrit, le barycentre, le point de* LEMOINE, *les symétriques du foyer de la parabole de* KIEPERT *du triangle anticomplémentaire* $t_1$ *par rapport au diamètre et au centre du cercle de* BROCARD *et le point de rencontre des droites qui joignent le point de* STEINER *au barycentre et le foyer de la parabole de* KIEPERT *du triangle* $t_1$ *au point de* LEMOINE *sont six points d'un*

*cercle orthogonal à celui qui est décrit sur la distance des centres isodynamiques comme diamètre.*

Le symétrique L, du point P par rapport au centre ω du cercle de BROCARD est un sommet du parallélogramme OMKL, et l'angle des droites LG et LK est égal à celui des droites MO et MG, c'est-à-dire à θ, de sorte que L, est sur le cercle $(\Omega) \equiv OGK$. D'autre part, $M_1$ désignant le symétrique de M par rapport au diamètre de BROCARD OK,

$$KM_1 = KM = OL,$$

et le trapèze isoscèle $OKM_1L$, est inscrit au cercle (Ω).

Il en résulte que la droite MK, parallèle à OL, rencontre le cercle (Ω) au symétrique $S_1$ de $M_1$ par rapport aux diamètres OΩ des cercles (O) et (Ω), c'est-à-dire au second point de rencontre de ces cercles. La droite $S_1G$ qui fait avec $S_1K$ un angle égal à θ passe donc par le point de STEINER S.

Enfin, le cercle (Y) décrit sur la distance VW des centres isodynamiques comme diamètre coupe orthogonalement les cercles (ω), (O) et (Ω), car le quaterne (O, K, V, W) est harmonique, ce qui achève d'établir le théorème.

N. B. — D'après ce qui précède, si les points O et K sont distincts, le point $M_1$ est distinct du point M et le cercle $(\Omega) \equiv OGK$ rencontre toujours le cercle (O).

Pour que les cercles (O) et (Ω) soient tangents, auquel cas $M_1 \equiv S_1$, il faut et il suffit que les droites GK et SM soient parallèles. Or, la droite GK coïncide avec la transversale réciproque de la complémentaire de la tangente SM à l'ellipse (E), par rapport à *t*. Donc, il faut et il suffit que GK soit parallèle à l'un des côtés du triangle *t* qui est *automédian*. Dès lors :

*Dans un triangle* automédian *t, le cercle* $(\Omega) \equiv OGK$ *est tangent au cercle circonscrit en l'un des sommets et réciproquement.*

Si GK est parallèle au côté BC, le cercle (Ω) se confond avec celui qui est décrit sur OA comme diamètre, ce qui résulte d'ailleurs de la perpendicularité des droites OG et AG, OK et AK dans ce triangle spécial.

COROLLAIRES. — I. *Le point de rencontre* Y *du diamètre de* BROCARD *et de la droite de* LEMOINE *coïncide avec le centre radical des cercles* (O), (ω), (Ω).

II. *La droite* $GM_1$ *est une symédiane du triangle* OGK.

**4.** — THÉORÈME. *Dans un triangle t, le point de* TARRY, *le symétrique du foyer de la parabole de* KIEPERT *du triangle anticomplémentaire par rapport au diamètre de* BROCARD *et les centres des cercles circonscrit et de* BROCARD *sont sur un cercle tangent à la droite d'*EULER *au centre du cercle circonscrit.*

Ces propriétés résultent clairement de l'égalité des angles des droites TO et Tω, MG et $L_1K$, OG et OK.

**5.** — Les droites OG, T'M, ($S_1$, $M_1$, Y) concourant en X, si on désigne par $S'_1$ le point diamétralement opposé à $S_1$ sur le cercle (O), la suite d'égalités

$$(GM_1OK) = S_1(GM_1OK) = S_1(GXOP) = (GXOP) = M(GXOK) =$$
$$= M(TT'M'S_1) = TT'M'S_1) = (SM_1MS'_1) = S_1(SM_1MS'_1) =$$
$$S_1(GM_1KO) = (GM_1KO)$$

donne $[(GM_1OK)]^2 = 1$ ou, dans le cas général, $(GM_1OK) = -1$, de sorte que la droite MG contient le milieu de OK, centre du cercle de BROCARD (ω) de *t*. On retrouve ainsi le théorème prérappelé de CÉSARO.

**6.** — QUADRILATÈRE COMPLET $(Q) \equiv (t, \Delta)$. — THÉORÈME. *Dans un triangle t, les droites qui joignent les sommets au point de* TARRY *passent par les centres des cercles circonscrits aux trois autres triangles du quadrilatère complet* (Q) *et réciproquement.*

En effet, si on désigne par α, β, γ les angles des droites BC, CA, AB avec le diamètre de BROCARD OK de *t*, dont l'orthopôle, par rapport au triangle $t_1$, coïncide avec le point de STEINER S, on obtient les égalités

$$(1) \qquad SA = 2R \cos \alpha,\ SB = 2R \cos \beta,\ SC = 2R \cos \gamma$$

dont il résulte, d'abord,

$$\widehat{TCA} = \widehat{TSA} = \alpha,\ \widehat{TAB} = \widehat{TSB} = \beta,\ \widehat{TBC} = \widehat{TSC} = \gamma;$$

ensuite, que les droites $AO_a$, $BO_b$, $CO_c$ qui joignent les sommets de *t* aux centres des cercles circonscrits aux triangles (AB, AC, Δ), (BA, BC, Δ), (CA, CB, Δ) du quadrilatère (Q), et les perpendiculaires menées des points A, B, C sur Δ sont isogonales dans les angles A, B, C de ces triangles, et réciproquement.

Corollaires. — I. *Le cercle de* Miquel *du quadrilatère* (Q) *passe par le point de* Tarry *du triangle t.*

II. *Les parallèles aux côtés d'un triangle menées par le point de* Steiner *recoupent le cercle circonscrit aux symétriques des sommets par rapport au diamètre de* Brocard *et réciproquement.*

Cette construction du point de Steiner d'un triangle se déduit facilement des relations (1).

Théorème. — *La droite de* Lemoine *du triangle t se confond avec la droite d'*Euler *du triangle* $O_aO_bO_c$. Le cercle Miquel du quadrilatère (Q), qui se confond avec le cercle TOM passe aussi par le symétrique X du point de Miquel M par rapport à la droite Δ, car

$$\widehat{MXO} = \widehat{OTM} = \theta .$$

Le centre du cercle de Miquel est donc sur la droite de Lemoine Δ de *t*. D'autre part, les triangles *t* de $O_aO_bO_c$ sont directement semblables et leur angle de similitude

$$\widehat{CMO_c} = \pi - (\widehat{MCO_c} + \widehat{CO_cM}) = 90^o - \theta$$

est égal à celui des droites OG et Δ, ce qui achève de démontrer le théorème.

Corollaire. — *La droite qui joint le point de* Steiner S *au point de* Miquel M *du quadrilatère* (Q) *rencontre le cercle de* Miquel *de celui-ci au point diamétralement opposé au point de* Tarry T.

Corollaire. — *Le triangle tangentiel de* t *et celui qui a pour sommets les symétriques du point de* Tarry, *par rapport aux sommets de t, sont orthologiques; l'un des centres d'orthologie coïncide avec le point de* Miquel *du quadrilatère* (Q).

**7.** — Théorème. — *Dans un triangle t, on a la relation*

$$\left(\frac{SA}{a}\right)^2 + \left(\frac{SB}{b}\right)^2 + \left(\frac{SC}{c}\right)^2 = 2 ,$$

*entre les distances du point de* Steiner *aux sommets et les longueurs des côtés.*

D'après une propriété de l'orthopôle d'un diamètre du cercle cir-

conscrit à $t$ [1], les triangles SBC et $AB_2C_2$ sont semblables, $B_2$, $C_2$ désignant les points de rencontre des droites Δ, CA, AB. Donc,

$$SB : a = AC_2 : AB_2 .$$

Des formules classiques donnent, d'abord, si on suppose $c<a<b$,

$$AC_2 = \frac{b^2c}{b^2-a^2}, \quad B_2C_2 = \frac{a^2b^2c^2\,[(b^2-a^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2-c^2)^2]}{2(b^2-a^2)^2(a^2-c^2)^2};$$

ensuite,

$$\overline{SB}^2 = \frac{2b^2(a^2-c^2)^2}{(b^2-a^2)^2+(b^2-c^2)^2+(a^2-c^2)^2}.$$

On obtient des valeurs analogues pour $\overline{SA}^2$, $\overline{SC}^2$ et la relation qu'il s'agissait d'établir.

**8.** — THÉORÈME. — *Dans un triangle t, la transversale réciproque de la droite* GK *coïncide avec la polaire trilinéaire du réciproque de l'orthopôle du diamètre de* BROCARD.

L'orthopôle ψ du diamètre de BROCARD OK du triangle $t$, par rapport à celui-ci, coïncide avec le complémentaire du point de STEINER S.

Soient $A_3$ l'anticomplémentaire de A, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les points de rencontre de BC avec les droites GK et $A_3S$. La droite MS est tangente à l'ellipse (E) et passe au milieu $\alpha_3$ de $\alpha_1\alpha_2$ [2]. D'autre part, la droite $A_3S$ coïncide avec la polaire de $\alpha_3$ par rapport à (E), puisque $A_3$ est le pôle de BC. La droite Aψ coupe donc BC en l'isotomique de $\alpha_2$ et $(\alpha_3\alpha_2CB) = -1$, ce qui démontre la proposition.

**9.** — THÉORÈME. — *Dans un triangle t, les droites qui joignent le point de* STEINER *à ceux où les bissectrices recoupent le cercle circonscrit, rencontrent les anti-bissectrices* [3] *correspondantes sur l'ellipse de* STEINER *circonscrite.*

Il suffira de démontrer le théorème pour la bissectrice intérieure AD de l'angle A du triangle $t$ qui recoupe le cercle circonscrit en D', dont l'antibissectrice $AD_1$ est rencontrée en $D_2$ par la droite SD'. Soient $a$ et $a'$ les points de rencontre de la symédiane AK avec BC et le cercle ABC; $A_1$ et A' ceux où la médiane AG coupe BC et S$a'$. Le point A', symétrique de A par rapport à G et de G par rapport

---

(1) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1913, 202.

(2) Ces remarques résultent d'un théorème de CESARO, *loc. cit.*

(3) Droite issue du sommet du triangle et passant par l'isotomique du pied d'une bissectrice de l'angle en ce sommet.

à $A_1$, est situé sur l'ellipse (E). Par la considération de rapports anharmoniques, on obtient, d'une part,

$$S(A'D_2BC)=S(a'D'BC)=A(a'D'BC)=(aDBC)=\frac{aB}{ac}\cdot\frac{DC}{DB}=-\left(\frac{c^2}{b^2}\cdot-\frac{b}{c}\right)=\frac{c}{b}$$

d'autre part,

$$(A_1\,D_1\,B\,C)=\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{D_1C}{D_1B}=\frac{c}{b}\cdot$$

Donc $A(A_1D_1BC) = S(a'A_1BC)$, et le point A' est sur la conique SABA'C qui se confond avec l'ellipse (E).

**10.** — Théorème. — *Dans un triangle t, l'axe radical du cercle circonscrit et du symétrique de celui-ci, par rapport au centre de gravité, se confond avec le diamètre conjugué de la droite* GK *dans l'ellipse de* Steiner *circonscrite.*

Si on désigne par A', B', C' les symétriques des sommets A, B, C de *t* par rapport au point G et par A'', B'', C'' les points de rencontre des médianes AG, BG, CG, avec le cercle ABC, les cercles AB'C', BC'A', CA'B' concourent en un point du cercle ABC [1] qui se confond avec le point de Steiner S. Car, d'après une construction classique de ce point, les droites SA', SB', SC' passent par les points de rencontre des symédianes de *t* avec le cercle circonscrit, et on a

$$\widehat{AC'B} = \widehat{C'B'B} = \widehat{B'BC} = \widehat{ASB'}.$$

Les points B', B'', C', C'' sont également concycliques, de sorte que le point de rencontre $\alpha$ des droites B'C' et B''C'' est sur l'axe radical des cercles A'B'C' et B'B''C'C'' et le point $\alpha$ coïncide avec le centre radical du cercle ABC associé aux deux précédents.

Comme la polaire du point de rencontre des droites GK et BC, par rapport à l'ellipse (E), est perpendiculaire à la droite d'Euler OG de *t* [2], l'axe radical G$\alpha$ des cercles ABC et A'B'C' se confond, dans l'ellipse (E), avec le diamètre conjugué de la droite GK.

*(mars 1950).*

---

(1) Propriété générale quand on remplace G par un point arbitraire du plan.
(2) Cfr. R. Goormaghtigh, *loc. cit.*

# Sur les groupes de parties d'un demi-groupe

PAR

Robert BALLIEU

---

**0.** Etant donné un demi-groupe G (ensemble avec une loi de composition, — multiplication —, partout définie et associative), nous considérons l'ensemble **P** des parties de G muni de la loi de composition induite de la façon habituelle par la loi de composition de G. **P** est un demi-groupe et l'ensemble **P*** des parties non vides de G en est un sous-demi-groupe.

Nous connaissons des exemples où une partie de **P*** en est un sous-groupe. Le plus classique est celui, G étant un groupe, des classes de G suivant un sous-groupe distingué. Il est aisé d'en indiquer d'autres. Ainsi, étant donné un demi-groupe G renfermant comme sous-demi-groupe un groupe K, chaque partition de K en ses classes suivant un de ses sous-groupes distingués donne une partie de **P*** formant groupe. Pour un groupe G quelconque, si H est la réunion de classes complètes d'éléments conjugués et est idempotent dans **P***, l'ensemble des translatés $Hx$ de H par les éléments de G est un sous-groupe de **P***. D'autres exemples s'écartent davantage de celui de la partition d'un groupe suivant un sous-groupe distingué; citons celui du groupe additif des nombres réels qui peut être considéré comme un sous-groupe du demi-groupe **P*** des parties non vides du groupe additif **Q** des nombres rationnels en prenant l'ensemble des parties de **Q** formées chacune des éléments de **Q** strictement supérieurs à un nombre réel donné.

Nous indiquerons dans cet article quelques propositions se rapportant à des situations où intervient un sous-groupe du demi-groupe **P*** des parties non vides d'un demi-groupe G. En particulier, nous établirons que les seuls sous-groupes de **P*** dont l'élément-unité E soit un sous-groupe de G sont les partitions suivant E d'un sous-

groupe H de G, renfermant E comme sous-groupe distingué. Nous étudions, pour le cas d'un groupe G, des conditions sous lesquelles l'ensemble des translatés à droite $Hx$ d'une partie non vide de G par les éléments de G forme un sous-groupe de **P***; nous verrons ainsi que l'ensemble des translatés $Hx$ d'une partie non vide H d'un groupe G et l'ensemble des translatés $x$H ne peuvent être simultanément sous-groupe de **P*** sans être confondus et qu'alors H est un translaté (à droite et à gauche) d'une partie K non vide de G, idempotente et formée de classes entières d'éléments conjugués de G. Nous indiquerons enfin quelques remarques générales sur les sous-groupes quelconques du demi-groupe **P*** des parties non vides d'un demi-groupe.

**1**. Soit **H** un sous-groupe du demi-groupe **P*** d'un demi-groupe G tel que l'élément-unité E de **H** soit un sous-groupe de G. Soit H la réunion des éléments de **H**. Nous montrerons que H *est un groupe*, que E *en est un sous-groupe distingué* et que **H** *est l'ensemble des classes de* H *suivant* E.

Soit $e$ l'élément-unité de E. Considérons un élément $h$ de H. Il appartient à un élément A de **H**. Soit B l'inverse de A dans **H**. Nous avons $AB = BA = E$. Il en résulte l'existence d'un élément $a$ de A et d'un élément $b$ de B avec $ab = e$, ($b$ est, si l'on veut, un inverse à droite de $a$ par rapport à $e$). Nous avons alors, puisque $a$B est contenu dans $AB = E$,

$$bE \subseteq BE = B; \quad E = abE \subseteq aB \subseteq E;$$

$a$B est égal à E et donc, $a$E est égal à A comme le montrent les relations :

$$aE = aBA = EA = A.$$

$h$ est donc de la forme $h = ak$, $k \in E$. Alors, $he = a(ke) = ak = h$; $e$ est élément-unité droitier de H. Conservant les notations précédentes, soit $k^{-1}$ l'inverse de $k$ dans E. Nous avons alors : $h(k^{-1}b) = aeb = ab = e$; chaque élément de H a dans H un inverse droitier par rapport à $e$. Ainsi, H est un sous-demi-groupe de G, renferme un élément-unité droitier $e$ et un inverse à droite par rapport à $e$ de chacun de ses éléments; H est un groupe. De plus, comme nous l'avons vu, chaque élément A de **H** est une classe à gauche de H par rapport à E; **H** est la partition du groupe H en ses classes (à gauche)

suivant le sous-groupe E; d'où, puisque **H** est un groupe, E est sous-groupe distingué de H, (1).

*Remarques.* 1. L'élément-unité E d'un sous-groupe **H** du demi-groupe **P*** d'un demi-groupe G est le seul élément de **H** qui puisse être sous-groupe de G, car il est le seul élément idempotent de **H**.

2. Si **H** est seulement un demi-groupe, avec élément-unité E, de **P*** et que E soit encore sous-groupe de G, l'intersection d'un élément A de **H** et de E est ou vide ou égale à E, car si $a$ est commun à A et à E, nous avons :

$$E = Ea \subseteq EA = A.$$

Si de plus, A a dans **H** un inverse B par rapport à E et que A renferme E, A est égal à E, car nous avons :

$$A \supseteq E; \quad E = AB \supseteq EB = B;$$

d'où, désignant par $B^{(-1)}$ l'ensemble des inverses dans E des éléments de B,

$$AB = E; \quad A \subseteq EB^{(-1)} = E,$$

et A = E. Plus généralement, avec les mêmes hypothèses sur **H**, si A a dans **H** un inverse B par rapport à E, l'intersection de A et d'un élément C de **H** est vide ou égale à A, car nous avons :

$$E \cap CB = AB \cap CB \supseteq (A \cap C)\,B;$$

si $A \cap C$ n'est pas vide, $E \cap CB$ ne l'est pas et nous avons :

$$E \subseteq CB; \quad A = EA \subseteq CBA = C.$$

3. Si nous partons d'un semi-groupe G, le résultat obtenu ci-dessus nous donne immédiatement que les seuls sous-groupes du demi-groupe **P*** d'un semi-groupe G dont un élément soit une partie finie

---

(1) Nous avons utilisé les propositions : Un demi-groupe avec élément-unité droitier $e$ tel que chaque élément ait un inverse à droite par rapport à $e$ est un groupe; les classes à gauche d'un groupe par rapport à un sous-groupe ne forment à leur tour un groupe pour la multiplication des parties de G que si le sous-groupe est distingué dans G. Dans le cas présent, nous pouvons nous dispenser de recourir à ces propositions. Il suffit de permuter dans les raisonnements ci-dessus les mots « droite » et « gauche » pour avoir que $e$ est élément-unité gaucher de H, que chaque élément de H a un inverse à gauche par rapport à $e$ et que chaque élément de **H** est aussi une classe à droite de H par rapport à E, ce qui, joint aux résultats déjà acquis, donne les conclusions énoncées.

de G sont les partitions d'un sous-groupe H de G suivant un sous-groupe distingué fini de H.

**2.** Examinons le cas, G étant un groupe et H une partie fixe non vide de G, de l'ensemble **H** des translatés à droite $Hx$ de H par un élément quelconque $x$ de G. Le même **H** s'obtient par le même procédé à partir d'un quelconque de ses éléments $Ha$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que **H** soit un groupe est l'existence d'un élément $x_0$ de G tel que l'on ait pour tout élément $x$ de G, $HxHx_0 = Hx$. La condition est nécessaire car elle exprime que **H** renferme un élément-unité droitier $Hx_0$. Elle est suffisante. En effet, elle entraîne

$$Hx_0xHx_0y = Hx_0xy.$$

Par conséquent, l'application $x \longrightarrow Hx_0x$ définit un homomorphisme de G sur **H**, qui est donc un groupe [1]. Chaque groupe **H** ainsi obtenu à partir d'un H satisfaisant à la condition indiquée est donc image homomorphe de G et est isomorphe à un groupe quotient de G par un sous-groupe distingué D; D n'est autre que l'ensemble des éléments $x$ de G pour lesquels $Hx_0x = Hx_0$.

Posons $K = Hx_0$. Lorsque **H** est un groupe et que $x_0$ soit l'élément intervenant dans la condition précédente, K est l'élément-unité de **H** et H est un translaté à droite de K. De plus, nous avons pour tout $x$ de G : $Hx_0xHx_0 = Hx_0x$, c'est-à-dire $KxK = Kx$. Ainsi, *une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des translatés à droite d'une partie fixe non vide d'un groupe* G *par les éléments de* G *soit un sous-groupe du demi-groupe* **P*** *de* G *est que cette partie fixe soit un translaté à droite d'une partie non vide* K *de* G *satisfaisant à*

(1) $$KxK = Kx \text{ pour tout } x \text{ de G.}$$

Indiquons quelques propriétés d'une partie non vide K d'un groupe G satisfaisant à cette dernière condition. Un tel K est idempotent. Si nous désignons par $K^{(-1)}$ l'ensemble des inverses dans G des éléments de K, nous avons encore identiquement pour tout $x$ de G : $K^{(-1)}xK^{(-1)} = xK^{(-1)}$, ce qui revient à dire que l'ensemble des $xK^{(-1)}$ est aussi un sous-groupe de **P***. Considérons maintenant $L = KK^{(-1)}$; L est un sous-groupe de G et renferme K et $K^{(-1)}$. En effet, L coïn-

---

[1] Il faut souligner que nous avons seulement utilisé l'hypothèse que l'ensemble **H** a un élément-unité à droite. Par conséquent, cette hypothèse entraîne que **H** est un groupe.

cide avec l'ensemble des inverses dans G de ses éléments. De plus, nous avons grâce à l'identité (1) :

$$L^2 = KK^{(-1)}\ KK^{(-1)} = K^2K^{(-1)} = KK^{(-1)} = L.$$

L est un sous-groupe de G. Il renferme K et donc $K^{(-1)}$, car si $k$ appartient à K, $k^2$ appartient à K et alors $k = k^2k^{-1}$ appartient à $L = KK^{(-1)}$. L est même sous-groupe distingué de G. En effet, considérons l'ensemble des $KxK^{(-1)}$, où $x$ parcourt G. Nous avons

$$KxK^{(-1)}\ KyK^{(-1)} = KxK^{(-1)}\ yK^{(-1)} = KxyK^{(-1)}\ .$$

Par conséquent, l'application $x \longrightarrow KxK^{(-1)}$ définit un homomorphisme de G sur l'ensemble **K** des $KxK^{(-1)}$, qui est donc un sous-groupe de **P***. La réunion des éléments de **K** est égale à G, car $kxk^{-1}$, où $k$ est fixe, parcourt G avec $x$. L'élément-unité L de **K** est sous-groupe de G. Les résultats du paragraphe précédent montrent alors que L est sous-groupe distingué de G. En vertu des mêmes résultats, les éléments de **K** sont les classes de G suivant L; cela entraîne l'identité

(2) $\qquad KxK^{(-1)} = xKK^{(-1)} = KK^{(-1)}x$ pour tout $x$ de G.

En effet, $KxK^{(-1)}$ étant une classe de G suivant $L = KK^{(-1)}$, nous avons, pour tous $k_1$ et $k_2$ de K, en tenant compte des résultats précédents,

$$KxK^{(-1)} = k_1xk_2^{-1}\ KK^{(-1)} = k_1xKK^{(-1)};\ k_1^{-1}KxK^{(-1)} = xKK^{(-1)};$$

d'où, en laissant $k_1$ parcourir tout K,

$$xKK^{(-1)} = K^{(-1)}\ KxK^{(-1)} = KxK^{(-1)};$$

$L = KK^{(-1)}$ étant sous-groupe distingué de G, l'identité (2) est établie.

*Remarque.* Les résultats précédents contiennent en particulier le fait que les classes à droite d'un groupe G suivant un sous-groupe H ne peuvent former un groupe (dans **P***) que si H est un sous-groupe distingué de G. En effet, si elles forment groupe, H, étant idempotent dans **P***, est l'élément-unité de ce groupe; H est donc égal à l'élément K du raisonnement précédent; alors, $H = KK^{(-1)} = L$ est sous-groupe distingué de G.

Indiquons deux exemples. Soit G le groupe multiplicatif des quaternions non nuls $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $a_i$ réel, avec norme $N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Soit H l'ensemble des quaternions avec $a_0 > 1$; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Nous avons $H^2 = H$ et, pour tout quaternion $x$, $HxH = Hx$. $H^{(-1)}$ est l'ensemble des quaternions avec

$0 < a_0 < 1$; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; L est le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs; D est réduit à l'élément 1. Pour le même groupe G, soit K l'ensemble des quaternions de norme strictement supérieure à 1. Nous avons encore $KxK = xK = Kx$ pour tout quaternion $x$; l'ensemble $Kx$ est l'ensemble des quaternions de norme strictement supérieure à $N(x)$. Les $Kx$ forment un groupe d'ailleurs isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$. Dans le cas actuel, L est égal à G et D est le groupe multiplicatif des quaternions de norme égale à un.

**3.** Conservons les notations du paragraphe précédent et soit encore K une partie non vide du groupe G satisfaisant à l'identité (1). Soit D l'ensemble des éléments $x$ de G tels que $Kx = K$. Nous savons que D est sous-groupe distingué de G et que le groupe **K** des translatés $Kx$ est isomorphe à G/D. Nous pouvons observer que D est de plus un sous-groupe de L, car nous avons pour tout $x$ de D :

$$Kx = K;\ Lx = KK^{(-1)}\ x = KxK^{(-1)} = KK^{(-1)} = L.$$

Remarquons maintenant que de $K = KD$ résulte que K, et donc aussi chaque translaté $Kx$, est la réunion de classes de G suivant D. Considérons alors l'application canonique $f$ de G sur $G' = G/D$ définie par $f(x) = Dx$ et son extension, encore notée $f$, aux ensembles de parties $\mathbf{P}^*(G)$ et $\mathbf{P}^*(G')$; cette extension est encore une application homomorphique. Si nous posons $K' = f(K)$, elle applique le groupe **K** des $Kx$ sur l'ensemble des $K'x'$, $x' \in G'$. Ce dernier ensemble forme donc un sous-groupe **K'** de $\mathbf{P}^*(G')$ ayant K' comme élément-unité. K' satisfait donc dans G' à l'identité $K'x'K' = K'x'$. Il est de plus immédiat que l'égalité $K'x' = K'$, $(x' = f(x))$, est équivalente à $Kx = K$; le groupe D' des éléments $x'$ de G' tels que l'avant-dernière égalité ait lieu se réduit à l'élément-unité de G'. Inversement, soit D un sous-groupe distingué quelconque d'un groupe G et considérons le groupe-quotient $G' = G/D$. Si une partie non vide K' de G' satisfait, pour tout $x'$ de G', à $K'x'K' = K'x'$ et est telle que l'ensemble D' des éléments $x'$ avec $K'x' = K'$ se réduise à l'élément-unité de G', l'image réciproque K de K' dans l'application canonique de G sur G' satisfait à l'identité (1) et, de plus, l'ensemble des éléments $x$ de G avec $Kx = K$ est précisément D.

**4.** Cherchons à caractériser les parties non vides H d'un groupe G telles que l'ensemble $\mathbf{H}_d$ des $Hx$ d'une part et celui $\mathbf{H}_s$ des $xH$

d'autre part forment des sous-groupes de **P***, (1). Supposons qu'il en soit ainsi. Si $Hx_0$ et $y_0H$ sont respectivement les éléments-unités de $\mathbf{H}_d$ et $\mathbf{H}_s$, nous avons identiquement pour $x$ dans G :

$$HxHx_0 = Hx;\ y_0HxH = xH.$$

Nous en tirons successivement :

$$y_0Hx_0Hx_0 = y_0Hx_0;\ y_0Hx_0Hx_0 = x_0Hx_0;\ y_0Hx_0 = x_0Hx_0;\ y_0H = x_0H;$$

d'où, pour tout $x$ de G,

$$HxHx_0 = Hx;\ x_0HxH = xH.$$

Posons $K = Hx_0$; nous avons encore identiquement pour $x$ dans G :

$$KxK = Kx;\ x_0KxK = x_0Hx_0xHx_0 = x_0xHx_0 = x_0xK;\ KxK = xK.$$

Finalement, K est une partie non vide de G satisfaisant à l'identité :

(3) $$KxK = Kx = xK \text{ pour tout } x \text{ de G.}$$

En particulier, $x_0^{-1}K = Kx_0^{-1} = H$; $K = x_0H$. L'ensemble $\mathbf{H}_d$, égal à celui des $Kx$, et l'ensemble $\mathbf{H}_s$, égal à celui des $xK$ qui n'est autre que celui des $Kx$, coïncident. Donc, *si l'ensemble* $\mathbf{H}_d$ *des translatés à droite* $Hx$ *d'une partie non vide* H *d'un groupe* G *et l'ensemble* $\mathbf{H}_s$ *des translatés à gauche* $xH$ *sont chacun des groupes* (2), *ces deux ensembles sont égaux. De plus,* H *est un translaté (à droite et à gauche) d'une partie non vide* K *de* G *satisfaisant à l'identité* (3). *Inversement, si* K *est une telle partie de* G, *tout translaté* H *de* K *est en même temps translaté à droite et à gauche; l'ensemble des translatés à droite de* H *coïncide avec celui des translatés à gauche de* H *et est un groupe.*

La condition (3) revient à la suivante : K, non vide, est idempotent dans **P*** et est la réunion de classes complètes d'éléments conjugués de G.

Il y a lieu de remarquer que l'on retrouve la même condition (3) si l'on recherche dans quels cas les $Kx$ forment un groupe avec K comme élément-unité et les $K'x$, où K' est la réunion de K et de l'élément-unité $e$ de G, forment simultanément un groupe avec K' comme élément-unité (3). En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit

---

(1) J'ignore si cette condition est réellement plus restrictive que la condition examinée aux paragraphes 2 et 3.

(2) Il suffit pour avoir les conclusions obtenues ici de supposer que $\mathbf{H}_d$ a un élément-unité à droite et $\mathbf{H}_s$ un élément-unité à gauche.

(3) On peut faire une remarque analogue à celles des notes (2) et (4).

que l'on ait pour tout $x$ de G :

$$\text{(4)} \qquad KxK = Kx; \quad K'xK' = K'x.$$

Mais l'on a, si ces conditions sont vérifiées,

$$K'xK' = KxK \cup xK \cup Kx \cup x = Kx \cup xK \cup x; \quad K'x = Kx \cup x,$$

de plus, $x \in xK$ revient à $e \in K$ et revient donc aussi à $x \in Kx$. Finalement les conditions (4) sont équivalentes à : Pour tout $x$ de G,

$$KxK = Kx; \; xK \subseteq Kx,$$

c'est-à-dire à (3). En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour que les translatés $Kx$ dans un groupe G d'une partie K de G renfermant l'élément-unité de G forment un groupe d'élément-unité K est que K satisfasse de plus à l'identité (3).

Notons encore que si K est une partie non vide d'un groupe G et satisfait à l'identité (1), la réunion K′ des éléments de G conjugués à un élément de K satisfait à l'identité (3). Pour le voir, il suffit, puisque K′ est déjà réunion de classes complètes d'éléments conjugués de G, de montrer que K′ est idempotent. Ce fait résulte des relations ci-après :

$$K' = \bigcup_{y \in G} yKy^{-1};$$

$$(K')^2 = \bigcup_{y,z \in G} yKy^{-1}zKz^{-1} = \bigcup_{y,z \in G} yKy^{-1}zz^{-1} = \bigcup_{y \in G} yKy^{-1} = K'.$$

**5.** Indiquons enfin quelques remarques générales sur les sous-groupes quelconques du demi-groupe **P*** des parties non vides d'un groupe G.

Soit d'abord G un demi-groupe et soit **H** un sous-demi-groupe de **P***. La réunion H des éléments de **H** satisfait à $H^2 \subseteq H$. Pour que **H** ait un élément-unité droitier, il faut et suffit qu'un élément E de **H** soit idempotent et que les éléments de **H** soient formés par la réunion de translatés à gauche $xE$ de E par des éléments $x$ de G. En effet, si **H** a un élément-unité droitier E, nous avons, pour tout élément A de **H**.

$$\text{(5)} \qquad E^2 = E; \; A = AE = \bigcup_{a \in A} aE.$$

Inversement, si la condition indiquée est remplie, nous aurons pour chaque A de **H**, X étant une certaine partie de G,

$$A = \bigcup_{x \in X} xE \; ; \; AE = \left(\bigcup_{x \in X} xE\right)E = \bigcup_{x \in X} [(xE)E] = \bigcup_{x \in X} xE = A.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que **H** ait un élément-unité se déduit immédiatement de la précédente.

Cependant, chaque A d'un demi-groupe **H** de **P*** avec élément-unité E n'est pas nécessairement un translaté de E. Par exemple, prenons le groupe multiplicatif G des quaternions à coordonnées rationnelles; désignons par $A_r$ l'ensemble des éléments de G de norme strictement supérieure au nombre strictement positif $r$; les $A_r$ forment un sous-groupe **H** de **P***; $A_1$ est l'élément-unité de **H**; seuls les $A_r$, où $r$ est de plus rationnel, sont de la forme $A_1 x$, $x \in G$. E peut même être le seul élément de **H** qui soit translaté de E. Voici un exemple de cette situation. Prenons le groupe additif **Q** des nombres rationnels et soit $n$ un nombre entier rationnel quelconque; désignons par $A_n$ l'ensemble des éléments de **Q** strictement supérieurs à $n\sqrt{2}$. Les $A_n$ forment un groupe, isomorphe au groupe additif **Z** des entiers rationnels; l'élément nul est $A_0$, qui est le seul $A_n$ de la forme $A_0 + q$, $q \in \mathbf{Q}$.

Imposons maintenant à G d'être un groupe et à **H** d'être un sous-groupe de **P***. Soit E l'élément-unité de **H**; désignons par $A^{-1}$ l'inverse de A dans **H**. Alors si A renferme l'élément-unité $e$ de G ou, ce qui revient au même, si A renferme l'inverse dans G d'un élément de E, nous avons :

$$A = EA \supseteq Ee = E; \; E = AA^{-1} \supseteq eA^{-1} = A^{-1}; \; A \supseteq E \supseteq A^{-1}.$$

La relation $A \supseteq A^{-1}$ n'est pas caractéristique de la situation examinée ici; elle peut même avoir lieu sans que A ne renferme E. Ainsi, prenons le groupe additif **Z** des entiers rationnels; désignons par $A_n$, $n \in Z$, l'ensemble des éléments de **Z** de même parité que $n$ et supérieurs à $n$; les $A_n$ forment un groupe additif dont $A_0$ est l'élément nul; $A_n$ et $A_{-n}$ sont opposés; pour chaque $n$ négatif, $A_n$ renferme son opposé, et, si $n$ est de plus impair, $A_n$ ne contient pas $A_0$. Remarquons encore que la relation $A \supseteq A^{-1}$ est équivalente à $A^2 \supseteq E$ et que les relations $A \supseteq E$ et $E \supseteq A^{-1}$ sont équivalentes.

# Les solutions infiniment voisines des équations récurro-différentielles

PAR

R. H. GERMAY

Professeur à l'Université de Liège

§ 1. THÉORÈME. *Considérons la suite indéfinie de fonctions*

$$(1) \qquad F_1(x, u, v; \lambda),\ F_2(x, u, v; \lambda)\ \ldots\ F_n(x, u, v; \lambda),\ \ldots$$

*Supposons que ces fonctions soient définies et continues dans le champ de variation*

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ \ u_0 - (b+c) \leqslant u \leqslant u_0 + (b+c), \\ v_0 - (b+c) \leqslant v \leqslant v_0 + (b+c),\ \ |\lambda| \leqslant d \end{cases}$$

*moyennant*

$$(3) \qquad u_0 = v_0$$

*les lettres a, b, c, d désignant des nombres positifs fixes.*

*Admettons qu'elles soient bornées dans leur ensemble dans le champ de variation* (2), *c'est-à-dire que l'on ait, quel que soit n, pour tout système de valeurs de x, u, v, λ appartenant à* (2),

$$(4) \qquad |F_n(x, u, v; \lambda)| < M$$

M *désignant un nombre positif fixe.*

*Supposons encore que ces fonctions satisfassent, dans ce champ, à une même condition de Lipschitz par rapport à u, v, λ*

$$(5) \qquad |F_n(x, u, v; \lambda) - F_n(x, u', v'; \lambda')| < A\{|u-u'| + |v-v'|\} + B|\lambda - \lambda'|$$

*Appellons $y_0$ la valeur commune de $u_0$ et de $v_0$.*

*Considérons les équations différentielles récurrentes*

$$(6) \qquad \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2; 0)\ \frac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_2, y_3; 0) \ldots \frac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_n, y_{n+1}; 0) \ldots$$

*Représentons par*

$$(7) \qquad \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

*leurs solutions prenant en $x = x_0$ la valeur $y_0$.*

*L'existence de ces solutions est assurée dans l'intervalle* $(x_0,\ x_0 + h)$ *où* $h$ *désigne le plus petit des nombres*

$$a,\ \frac{b+c}{M} \tag{8}$$

*Considérons-les dans l'intervalle* $(x_0,\ x_1)$ *tel que* $x_1 - x_0$ *soit le plus petit des nombres positifs.*

$$a,\ \frac{b}{M} \tag{9}$$

*Ecrivons enfin les équations différentielles récurrentes*

$$\frac{dY_1}{dx} = F_1(x, Y_1, Y_2; \lambda), \ \ldots \ \frac{dY_n}{dx} = F_n(x, Y_n, Y_{n+1}; \lambda), \ \ldots \tag{10}$$

*Pour les valeurs de* $\lambda$ *suffisamment petites en module, les équations* (10) *admettent dans l'intervalle* $(x_0,\ x_1)$ *les intégrales*

$$\Phi_1(x,\ \lambda),\ \Phi_2(x,\ \lambda),\ \ldots\ \Phi_n(x,\ \lambda) \tag{11}$$

*fonctions continues de* $x$ *dans l'intervalle* $(x_0,\ x_1)$ *et de* $\lambda$ *pour les valeurs considérées de ce paramètre. Ces intégrales prennent en* $x_0$ *la valeur* $y_0$ *quelle que soit la valeur de* $\lambda$. *Elles se réduisent aux solutions* (7) *des équations différentielles récurrentes* (6) *quand on y fait* $\lambda = 0$. *On dit que les intégrales* (11) *des équations différentielles récurrentes* (10) *sont infiniment voisines des solutions* (7) *des équations récurro-différentielles* (6).

DÉMONSTRATION

§ 2. *Considération d'une équation auxiliaire.*

Considérons d'abord l'équation différentielle auxiliaire [1]

$$\frac{dz}{dx} = 2Az + B\,|\,\lambda\,| \tag{12}$$

et cherchons son intégrale s'annulant en $x = x_0$. Désignons-la par la notation $Z(x)$. Les approximations successives de cette intégrale sont données par la formule récurrente

$$z_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \{\, 2A\, z_n(t) + B\,|\,\lambda\,|\,\}\, dt \tag{13}$$

moyennant

$$z_0 = 0,\ z_1(x) = B\,|\,\lambda\,|\,(x - x_0) \tag{14}$$

Toutes les fonctions $z_{n+1}(x)$ sont positives dans l'intervalle $(x_0,\ x_1)$

---

[1] E. GOURSAT : *Cours d'Analyse mathématique*, tome III, 3e édition, chap. XXIII, § 461, p. 14.

sauf en $x_0$ où elles s'annulent. La valeur initiale $z_0$ étant nulle, les approximations $z_n(x)$ restent inférieures à l'intégrale $Z(x)$. Cette dernière s'écrit immédiatement sous la forme

$$(15) \quad Z(x) = e^{2A(x-x_0)}\left[C + B|\lambda| \int_{x_0}^{x} e^{-2A\,(t-x_0)}\, dt\right] = Ce^{2A(x-x_0)} - \frac{B|\lambda|}{2A}$$

La valeur de la constante d'intégration C se détermine par la condition initiale

$$(16) \quad Z(x_0) = 0$$

On trouve

$$(17) \quad C = \frac{B|\lambda|}{2A}$$

et

$$(18) \quad Z(x) = \frac{B|\lambda|}{2A}\left[e^{2A(x-x_0)} - 1\right]$$

On peut faire en sorte que l'on ait

$$(19) \quad Z(x) \leqslant c$$

pour toute valeur de $x$ dans $(x_0, x_1)$. La fonction $Z(x)$ étant croissante et atteignant sa borne supérieure en $x_1$, il suffit de prendre $|\lambda|$ de telle manière que

$$(20) \quad \frac{B|\lambda|}{2A}\left[e^{2A(x_1-x_0)} - 1\right] \leqslant c\,, \quad |\lambda| < \frac{2Ac}{B} \cdot \frac{1}{e^{2A(x_1-x_0)} - 1}$$

On a alors pour toute valeur de $x$ appartenant à $(x_0, x_1)$

$$(21) \quad |z_n(x)| < c$$

quel que soit le rang $n$ de l'approximation $z_n(x)$ de $Z(x)$.

§ 3. *Construction de suites indéfinies de fonctions.*

L'existence et l'unicité des solutions (7) des équations (6) sont assurées par le théorème de M. Bruwier [1]. Ces intégrales donnent lieu aux identités

$$(22) \quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F_n[t, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t); 0]\, dt, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Prenons comme valeurs de départ les fonctions $\varphi_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

---

[1] L. Bruwier : Sur une classe d'équations récurro-différentielles, *(Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, 3e série, tome XVII, fasc. 4 § 18, p. 43).

Ecrivons une première suite de fonctions définies par les formules suivantes dans l'intervalle $(x_o, x_1)$

$$(23)\quad \begin{cases} Y_{1,1}(x, \lambda) = y_o + \int_{x_o}^{x} F_1[t, \varphi_1(t), \varphi_2(t); \lambda]\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n,1}(x, \lambda) = y_o + \int_{x_o}^{x} F_n[t, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t); \lambda]\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les valeurs de ces fonctions sont comprises entre $y_o - (b + c)$ et $y_o + (b + c)$. Les identités (22) permettent d'écrire en effet

$$(24)\quad |Y_{n,1}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| \leqslant \int_{x_o}^{x} |F_n[t, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t); \lambda] - F_n[t, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t); 0]$$

$$(25)\quad |Y_{n,1}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| < B|\lambda|(x - x_o), |[Y_{n,1}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| < z_1(x) < c$$

On a alors

$$(26)\quad |Y_{n,1}(x, \lambda) - y_o| \leqslant |Y_{n,1}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - y_o| < b + c$$

Les fonctions $Y_{n,1}(x, \lambda)$ peuvent être introduites sous les signes fonctionnels $F_n$. Ceci nous permet de construire la suite de fonctions

$$(27)\quad \begin{cases} Y_{1,2}(x, \lambda) = y_o + \int_{x_o}^{x} F_1[t, Y_{1,1}(t, \lambda), Y_{2,1}(t, \lambda); \lambda]\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n,2}(x, \lambda) = y_o + \int_{x_o}^{x} F_n[t, Y_{n,1}(t, \lambda), Y_{n+1,1}(t, \lambda); \lambda]\, dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Moyennant les identités (22), on en déduit successivement

$$(28)\quad |Y_{n,2}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| \leqslant \int_{x_o}^{x} |F_n[t, Y_{n,1}(t, \lambda), Y_{n+1,1}(t, \lambda); \lambda] - F_n[t, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t); 0]|\, dt$$

$$(29)\quad |Y_{n,2}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| < \int_{x_o}^{x} [A\{|Y_{n,1}(t, \lambda) - \varphi_n(t)| + |Y_{n+1,1}(t, \lambda) - \varphi_{n+1}(t)|\} + B|\lambda|]\, dt$$

$$(30)\quad |Y_{n,2}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| < \int_{x_o}^{x} \{2A z_1(t) + B|\lambda|\}\, dt$$

$$(31)\quad |Y_{n,2}(x, \lambda) - \varphi_n(x)| < z_2(x) < c$$

On en tire alors

$$(32)\quad |\,Y_{n,2}(x,\lambda) - y_0| \leqslant |\,Y_{n,2}(x,\lambda) - \varphi_n(x)\,| + |\,\varphi_n(x) - y_0\,| < b + c$$

Le procédé peut être continué indéfiniment. Les éléments

$$(33)\quad Y_{1,\mu}(x,\lambda),\ Y_{2,\mu}(x,\lambda),\ \ldots\ Y_{n,\mu}(x,\lambda),\ \ldots$$

de la $\mu^e$ suite étant supposés construits, ceux de la $(\mu+1)^e$ leur sont liés par les formules récurrentes

$$(34)\quad \begin{cases} Y_{1,\mu+1}(x,\lambda) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F_1[t,\, Y_{1,\mu}(t,\lambda),\ Y_{2,\mu}(t,\lambda);\,\lambda]\,dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{n,\mu+1}(x,\lambda) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} F_n[t,\, Y_{n,\mu}(t,\lambda),\, Y_{n+1,\mu}(t,\lambda);\,\lambda]\,dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On prouve aisément que si

$$(35)\quad |\,Y_{n,\mu}(x,\lambda)\,| < z_\mu(x)$$

on a aussi

$$(36)\quad |\,Y_{n,\mu+1}(x,\lambda)\,| < z_{\mu+1}(x)$$

Visiblement, toutes les fonctions $Y_{n,\mu}(x,\lambda)$ se réduisent à $y_0$ pour $x = x_0$, quelle que soit la valeur de $\lambda$

$$(37)\quad Y_{n,\mu}(x_0,\lambda) = y_0$$

Par ailleurs, pour $\lambda = 0$, toutes les formules définissant les $Y_{n,\mu}(x,\lambda)$ deviennent des identités. On a en effet

$$(38)\quad Y_{1,1}(x,0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F_1[t,\,\varphi_1(t),\,\varphi_2(t);\,0]\,dt = \varphi_1(x)$$

et ainsi de suite de proche en proche.

§ 4. *Convergence uniforme des suites*

$$(39)\quad Y_{n,1}(x),\ Y_{n,2}(x),\ \ldots\ Y_{n,\mu}(x),\ \ldots\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Les suites (39) convergent uniformément par rapport à $x$ et à $\lambda$. On peut écrire en effet successivement

$$(40)\quad Y_{n,\mu+1}(x,\lambda) - Y_{n,\mu}(x,\lambda)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \{\, F_n[t, Y_{n,\mu}(t,\lambda), Y_{n+1,\mu}(t,\lambda);\lambda] - F_n[t, Y_{n,\mu-1}(t,\lambda), Y_{n+1,\mu-1}(t,\lambda);\lambda]\,\}\,dt$$

$$(41) \qquad |Y_{n,\mu+1}(x,\lambda) - Y_{n,\mu}(x,\lambda)|$$

$$< \int_{x_0}^{x} A \{ |Y_{n,\mu}(t,\lambda) - Y_{n,\mu-1}(t,\lambda)| + |Y_{n+1,\mu}(t,\lambda) - Y_{n+1,\mu-1}(t,\lambda)| \} dt$$

Cette dernière formule est analogue à l'inégalité récurrente de M. Bruwier. En tenant compte d'abord de la première formule (25) et faisant successivement $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ dans l'inégalité (41), il vient de proche en proche

$$(42) \quad |Y_{n,\mu}(x,\lambda) - Y_{n,\mu-1}(x,\lambda)| < B \cdot |\lambda| \cdot (2A)^{\mu-1} \cdot \frac{(x-x_0)^{\mu}}{\mu!}$$

La convergence uniforme des suites (39) par rapport à $x$ et à $\lambda$ en résulte immédiatement. Désignons par

$$(43) \qquad Y_{n,\infty}(x,\lambda) = \Phi_n(x,\lambda), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

les limites respectives de ces suites pour $\mu \to \infty$. En passant à la limite dans les deux membres de la formule générale (34), il vient

$$(44) \quad \Phi_n(x,\lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F_n[t, \Phi_n(t,\lambda), \Phi_{n+1}(t,\lambda); \lambda]\, dt, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Les fonctions $\Phi_n(x,\lambda)$ sont continues par rapport à $x$ et à $\lambda$. Elles prennent en $x_0$ la valeur $y_0$; elles se réduisent aux fonctions $\varphi_n(x)$ pour $\lambda = 0$.

§ 5. Il n'existe pas d'autre système de solutions des équations récurro-différentielles (10), possédant les mêmes propriétés. S'il en existait un, nous l'appellerions $\Phi_n^*(x,\lambda)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Nous trouverions alors par les raisonnements habituels de la méthode des approximations successives

$$(45) \qquad \Phi_n^*(x,\lambda) - Y_{n,\mu+1}(x,\lambda)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \{ F_n[t, \Phi_n^*(t,\lambda), \Phi_{n+1}^*(t,\lambda); \lambda] - F_n[t, Y_{n,\mu}(t,\lambda), Y_{n+1,\mu}(t,\lambda); \lambda] \} dt$$

$$(46) \quad |\Phi_n^*(x,\lambda) - Y_{n,\mu+1}(x,\lambda)| < (b + 2c) \cdot (2A)^{\mu+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{\mu+1}}{\mu+1!}$$

Finalement

$$(47) \qquad \Phi_n^*(x,\lambda) = \lim_{\mu \to \infty} Y_{n,\mu+1}(x,\lambda) = \Phi_n(x,\lambda) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Saive, le 15 octobre 1950.

# Sur une propriété de certains polynômes d'Appell

PAR

M. F. CESCHINO

---

On sait que les polynômes $U_m(x)$ d'Hermite issus de la fonction génératrice $e^{ax-\frac{a^2}{2}}$ forment une suite de Sturm. Il ressort en outre d'une note d'Hermite (C. R. 58, page 272) que, si l'on suppose $m$ très grand, les zéros de $U_m(x)$ tendent à se confondre avec ceux de $\cos(x\sqrt{m})$ ou $\sin(x\sqrt{m})$, selon la parité de $m$.

Ce sont ces deux résultats que nous nous proposons d'étendre, d'une façon simple, aux polynômes $G_m(x)$ définis par le développement

$$e^{ax-\frac{a^p}{p}} = \Sigma \frac{a^m}{m!} G_m(x) \quad \text{où } p \text{ entier} > 0$$

et dont nous avons eu l'occasion de donner différentes propriétés (Thèse, Montpellier 1949).

Les G satisfont à la relation d'Appell

$$m\, G_{m-1} = \frac{d\, Gm}{dx}$$

d'où l'on tire que si $G_m$ a ses zéros distincts, il en est de même de $G_{n<m}$. On peut, en outre écrire $G_m$ sous la forme

$$G_m(x) = k(m)\, g_m(x)$$

où $g$ désigne une fonction hypergéométrique et $k$ un certain facteur.

Le changement de variable

$$x^p = \frac{\xi^p}{m}$$

nous permet de constater que la suite $(g_{pm+i}(\xi))$ converge uniformément vers le sinus circulaire d'ordre $p$ : $f(\xi, p, i)$ (L. Poli, Les sinus d'ordre supérieur — Cahiers Rhodaniens 1949).

La confluence $\left(x^p \to \frac{\xi^p}{m}\right)_{m \to \infty}$ nous fait d'ailleurs passer de l'équation différentielle des polynômes G :

(1) $$y^{(p)} - xy' + my = 0$$

à celle des sinus circulaires d'ordre $p$

$$Z^{(p)} + Z = 0$$

Les zéros de ces derniers étant tous distincts, on en conclut, d'après un théorème classique sur les suites de fonctions holomorphes (Montel, Familles normales, page 20) que les zéros des G sont distincts (sauf l'origine, éventuellement).

Si $p$ est impair, les racines réelles sont $> 0$.

Si $p$ est pair, elles sont deux à deux symétriques par rapport à l'origine.

Les racines imaginaires sont d'autre part réparties sur des droites issues de l'origine et d'angles polaires

$$\frac{2\pi\lambda}{p} \; ; \quad \lambda = 0, \; 1, \; \ldots, \; p - 1.$$

En vertu de la relation d'Appell, les polynômes G forment donc une suite de Sturm.

Pour $p = 3$ nous avons déjà établi cette propriété en utilisant l'adjointe de (1), mais la méthode ne nous a pas paru pouvoir s'étendre au cas de $p$ quelconque.

Lorsqu'on suppose $m$ très grand, les zéros de $G_{pm+i}$ tendent à se rapprocher de ceux de $f(p, i)$, c'est-à-dire, pour $p = 2$, de ceux de cos $(x\sqrt{2m})$ ou sin $(x\sqrt{2m})$.

Il nous est alors aisé de connaître une valeur asymptotique des modules des zéros de G, $(p > 2)$, pour les valeurs très grandes de $x$. Par exemple pour $p = 3$, $G_{3m}$ a une infinité de zéros de plus en plus voisins de ceux de cos $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}(3m)^{\frac{1}{3}}\right)$

# Sur une méthode de résolution de certaines équations intégrales dont le noyau est une fonction irrationnelle

PAR

**Maurice PARODI**

Considérons l'équation de première espèce en $f(x)$

$$\int_0^\infty K(x, s)\, f(x)\, dx = \theta(s) \tag{1}$$

et supposons que le noyau $K(x, s)$ soit l'image au sens de Laplace d'une fonction $N(x, t)$ ; en faisant sur les deux membres de (1) la transformation inverse de Laplace, $s$ étant considéré comme le paramètre de cette transformation, l'équation (1) peut être considérée comme l'image de la nouvelle équation

$$\int_0^\infty N(x, t)\, f(x)\, dx = g(t) \tag{2}$$

avec

$$g(t) \supset \theta(s)$$

en supposant que l'opération d'intégration sous le signe somme soit légitime.

Nous nous proposons dans ce travail de signaler un certain nombre de noyaux $K(x, s)$, irrationnels en $x$ et $s$, qui conduisent à des équations du type (2) immédiatement résolubles, tout au moins au point de vue formel.

I. — Soit par exemple l'équation

$$\int_0^\infty \sqrt{\sqrt{s^2+x^2}-s}\, f(x)\, dx = \theta(s)$$

On a

$$\sqrt{\sqrt{s^2+x^2}-s} \subset \frac{\sin xt}{t\sqrt{2\pi t}}$$

et l'équation (2) s'écrit dans ce cas

$$\int_0^\infty \sin xt\, f(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, t \sqrt{t}\, g(t)$$

En supposant satisfaites les conditions d'inversion de la transformation de Fournier, on a immédiatement

$$f(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x \sqrt{x}\, g(x) \sin x\, t\, dx$$

sous réserve de la convergence des intégrales.

Au type d'équations précédent se ramènent celles dont les noyaux s'écrivent

$$\sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + x^2} - s}{s^2 + x^2}} \subset \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin xt, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{s^2 + x^2} + s}{s^2 + x^2}} \subset \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos xt\ .$$

II. — Soit maintenant l'équation

$$\int^\infty (\sqrt{s^2 + x^2} - s)^\nu f(x) dx = \theta\,(s)$$

pour laquelle on a

$$K(x, s) = (\sqrt{s^2 + x^2} - s)^\nu \subset \frac{\nu x^\nu}{t}\ J_\nu\,(xt),\ R\,(\nu) > 0$$

$J_\nu(t)$ étant la fonction de Bessel d'ordre $\nu$.

L'équation envisagée se présente comme l'image de

$$\int_0^\infty x^\nu\, J_\nu\,(xt)\, f(x)\, dx = \frac{t\, g(t)}{\nu}$$

où

$$g(t) \supset \theta\,(s)\ .$$

En utilisant les résultats de Hankel qui veulent que si

$$G(t) = \int_0^\infty J_\nu\,(xt)\, F(x) dx$$

réciproquement

$$F(t) = t \int_0^\infty x\, G(x)\, J_\nu\,(xt) dx\ ,$$

et en supposant les conditions de validité de cette transformation satisfaites, il apparaît que la solution de la proposée s'écrit

$$f(t) = t^{1-\nu} \int_0^\infty x^2\, g(x)\, J_\nu(xt)\, dx\,.$$

A ce type d'équations dont la résolution conduit à utiliser la transformation de Hankel, sont à rapprocher celles de noyaux respectifs

$$\frac{(\sqrt{s^2+x^2}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+x^2}} \subset x^\nu J_\nu(xt),\ \mathrm{R}(\nu) > -1;$$

$$\frac{s+\nu\sqrt{s^2+x^2}}{\sqrt{s^2+x^2}} \subset \frac{t}{x^\nu} J_\nu(xt),\ \mathrm{R}(\nu) > -2;$$

$$\frac{1}{(s^2+x^2)^{\nu+\frac{3}{2}}} \subset \frac{\sqrt{\pi}\, t^{\nu+1}}{x^\nu 2^{\nu+1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} J_\nu(xt),\ \mathrm{R}(\nu) > -1;$$

$$\frac{1}{(s+\sqrt{s^2+x^2})^\nu} \subset \frac{\nu\, J_\nu(xt)}{x^\nu\, t}\ ,\ \mathrm{R}(\nu) > 0\ ;$$

$$\frac{\nu\sqrt{s^2+x^2}+s}{(s+\sqrt{s^2+x^2})^\nu} \subset \frac{\nu(\nu^2-1)\, J_\nu(xt)}{x^\nu\, t^2}\ ,\ \mathrm{R}(\nu) > -1\ ;$$

$$\frac{1}{(s^2+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \subset \left(\frac{2t}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\, J_\nu(xt),\ \mathrm{R}(\nu) > \frac{1}{2}\ ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+x^2}\,(s+\sqrt{s^2+x^2})^\nu} \subset \frac{1}{x^\nu} J_\nu(xt)\ ,\ \mathrm{R}(\nu) > -1\,.$$

III. — Soient maintenant les équations

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{s^4+x^4}\pm s^2}{s^4+x^4}}\, f(x)dx = \theta(s)\,.$$

On a

$$\sqrt{\frac{\sqrt{s^4+x^4}\pm s^2}{s^4+x^4}} \subset \sqrt{2}\ \begin{matrix} ber \\ bei \end{matrix}\ (xt)$$

et l'équation précédente est, au sens de Laplace, l'image de la suivante :

$$\int_0^\infty \begin{matrix} ber \\ bei \end{matrix}\ (xt)\, f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\, g(t)$$

où

$$g(t) \supset \theta(s) .$$

Or, on sait résoudre les équations du type précédent; en posant $t = 2\sqrt{t'}$, $x = \sqrt{x'}$, puis en supprimant les indices pour la commodité, elles s'écrivent

$$\int_0^\infty \begin{matrix} ber \\ bei \end{matrix} (2\sqrt{xt}) \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\, g(2\sqrt{t}) .$$

Les images de ces équations, prises par rapport à $t$, sont

$$\int_0^\infty \frac{1}{s} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\frac{x}{s}\right) \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \rho(s)$$

avec

$$\rho(s) \subset g(2\sqrt{t}) ;$$

soit

$$\int_0^\infty \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (x\, s) \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{s}\, \rho\left(\frac{1}{s}\right)$$

de solution formelle

$$\frac{f(\sqrt{s})}{2\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi} \int^\infty \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (x\, s)\, \rho\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} .$$

Ainsi

$$f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, t \int_0^\infty \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (xt^2)\, \rho\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} .$$

Les solutions des équations envisagées seront donc données par la séquence

$$g(t) \supset \theta(s) , \quad \rho(s) \subset g(2\sqrt{t})$$

et cette dernière équation.

# Sur l'équation différentielle de la fonction de Bessel du troisième ordre, d'indices nuls

PAR

MM. Pierre HUMBERT et Paul DELERUE

---

**1.** Les fonctions de Bessel du troisième ordre sont définies par la série

$$J_{m,n}(x) = \frac{x^{m+n}}{3^{m+n}\, m!\, n!}\, {}_0F_2\left(m+1,\ n+1;\ -\frac{x^3}{27}\right)$$

et satisfont à l'équation différentielle

$$y''' + \frac{3}{x}y'' + \frac{1 - 3m^2 + 3mn - 3n^2}{x^2}y' + \left[1 + \frac{(m+n)(2m-n)(m-2n)}{x^3}\right]y = 0.$$

Lorsque $m$ et $n$ ne sont pas entiers, il suffit de remplacer dans la définition $m!$ et $n!$ par $\Gamma(m+1)$ et $\Gamma(n+1)$; l'équation différentielle admet alors les deux solutions $J_{-m,\,n-m}$ et $J_{-n,\,m-n}$. Mais la recherche de solutions quand $m$ et $n$ sont entiers est plus difficile. Nous allons étudier ici le cas où $m = n = 0$.

**2.** L'équation différentielle à étudier est donc.

$$y''' + \frac{3}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y' + y = 0$$

nous désignerons son premier membre par $[y]$.

Elle est satisfaite par la fonction $J_{o,o}(x)$, ou ${}_0F_2\left((1,1;\ -\frac{x^3}{27}\right)$.

Pour trouver une solution de seconde espèce, que nous appellerons $Y_{o,o}(x)$, on peut employer une méthode bien connue dans la théorie des fonctions de Bessel ordinaires, qui revient à une dérivation : on trouve alors

$$Y_{o,o}(x) = J_{o,o}(x) \log x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x)^{3m}}{3^{3m}} \frac{\Psi(m+1)}{m!\, m!\, m!}$$

où $\Psi(m+1) = \frac{d}{dm} \log \Gamma(m+1)$.

La somme du second membre procédant suivant les puissances de $x^3$, il est indiqué de chercher à la mettre sous forme d'une série de fonctions $J_{m,2m}(x)$. On obtiendra donc

$$Y_{o,o}(x) = J_{o,o}(x) \log x + \alpha J_{1,2}(x) + \beta J_{2,4}(x) + \gamma J_{3,6}(x) + \dots$$

et on calculera les coefficients $\alpha$, $\beta$, ..., par la méthode de Neumann. On a en effet

$$[Y_{o,o}] = [J_{o,o}] = 0$$

$$[J_{o,o}(x) \log x] = -\frac{3}{x} J_{1,0}(x)$$

et

$$[J_{m,2m}(x)] = \frac{9m^2}{x^2} J'_{m,2m}(x)$$

ce qui, en tenant compte des formules de récurrence des fonctions J, s'écrit

$$[J_{m,2m}(x)] = \frac{3m}{2x} (J_{m,2m+1} + J_{m-1,2m-1})$$

On obtient donc $\left(\text{en supprimant le facteur } \frac{3}{x}\right)$

$$0 = -J_{1,0} + \frac{\alpha}{2}(J_{1,2} + J_{0,1}) + \frac{2\beta}{2}(J_{2,5} + J_{1,3}) + \frac{3\gamma}{2}(J_{3,7} + J_{2,5}) + \dots$$

d'où en identifiant

$$\alpha = 2,\ \beta = -1 = -\frac{2}{2},\ \gamma = \frac{2}{3},\ \dots$$

et

$$Y_{o,o}(x) = J_{o,o}(x) \log x + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{J_{m,2m}(x)}{m}$$

On remarquera la parfaite analogie de cette formule avec celle qui donne la fonction de seconde espèce ordinaire, $Y_o(x)$

$$Y_o(x) = J_o(x) \log x + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{J_{2m}(x)}{m}$$

**3.** Cherchons à présent à obtenir une solution de troisième espèce, $Z_{o,o}(x)$. On appliquera à Y la méthode appliquée à J, ce qui revient à une dérivation seconde, et on trouvera

$$Z_{o,o}(x) = \sum_m \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3m}}{m\,!\,m\,!\,m\,!} \left[\log^2 x - 2\log x\,\Psi(m+1) + \Psi^2(m+1) - \frac{\Psi'(m+1)}{3}\right.$$

C'est-à-dire

$$Z_{o,o}(x) = 2Y_{o,o}(x)\log x - J_{o,o}(x)\log^2 x + \sum \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{3m}}{m\,!\,m\,!\,m\,!}\left[\Psi^2(m+1) - \frac{\Psi'(m+1)}{3}\right.$$

La somme du second membre procède encore suivant les puissances de $x^3$ : mais si l'on cherche à a mettre sous forme d'une série de fonctions $J_{m,2m}$, on obtient des coefficients très compliqués. Les calculs se simplifient si on met cette série sous forme d'une série double, la première suivant les $J_{m,2m}$, la seconde suivant les $x\,J'_{m,2m}$ : ces deux fonctions en effet se développent suivant les puissances de $x^3$.

Posons donc :

$$Z_{o,o}(x) = J_{o,o}\log^2 x - 2\,Y_{o,o}\log x + \sum \lambda_m J_{m,2m} + \sum \mu_m x\,J'_{m,2m}.$$

On aura alors successivement

$$[Z_{o,o}] = 0$$

$$[J_{o,o}\log^2 x - 2\,Y_{o,o}\log x] = \frac{6}{x}\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m}(J_{m-1,2m-1} - J_{m,2m+1}) - \frac{6}{x^2}J'_{o,}$$

$$[\lambda_m J_{m,2m}] = \frac{3m\,\lambda_m}{2x}(J_{m,2m+1} + J_{m-1,2m-1})$$

$$[x\,J'_{m,2m}] = \frac{9m^2}{2x}(J_{m-1,2m-1} - J_{m,2m+1}) - 3\,J_{m,2m}$$

On a donc

$$-\frac{6}{x^2}J'_{o,o} + \frac{6}{x}\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m}(J_{m-1,2m-1} - J_{m,2m+1})$$
$$+ \sum_1^\infty \lambda_m \frac{3m}{2x}(J_{m-1,2m-1} + J_{m,2m+1})$$
$$+ \sum_o^\infty \mu_m \cdot \frac{9m^2}{2x}(J_{m-1,2m-1} - J_{m,2m+1}) - 3\sum_o^\infty \mu_m J_{m,2m} = 0$$

Or $J'_{o,o} = -J_{1,1}$. D'autre part, il existe un développement de $\frac{1}{x^2} J_{1,1}$ suivant les $J_{m,2m}$. On l'établit aisément par les formules de récurrence :

$$9\frac{J_{1,1}}{x^2} = J_{o,o} + \frac{3}{2} J_{1,2} + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 - 1} J_{m,2m}$$

Le premier et le dernier terme de l'équation ci-dessus nous permettront donc de calculer les coefficients $\mu_m$ : on trouve

$$\mu_o = \frac{2}{9} \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \quad \mu_m = \frac{4}{9(m^2 - 1)} \quad \text{pour } m > 1$$

Il est alors facile, par identification, de déterminer les $\lambda_m$ : on est amené à la relation de récurrence

$$m+1)\ \lambda_{m+1} + m\lambda_m = 4(-1)^m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right) + \frac{4}{3}\left[\frac{m^2}{m^2 - 1} - \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2 - 1}\right]$$

avec les deux cas particuliers $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -\frac{44}{9}$.

De cette formule de récurrence, on peut tirer la valeur de $\lambda_m$ (pour $m > 2$)

$$(-1)^{m-1}\lambda_m = \frac{8}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right) - \frac{4}{3}\frac{3m^2 - 3 + (-1)^m}{m^2(m^2 - 1)}$$

On aura donc, en définitive,

$$Z_{o,o}(x) = J_{o,o}(x) \log^2 x - 2\, Y_{o,o}(x) \log x + 3\, J_{1,2}(x) - \frac{44}{9} J_{2,4}(x)$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty} \left[\frac{8}{m} S_m - \frac{4}{3}\frac{3m^2 - 3 + (-1)^m}{m^2(m^2 - 1)}\right] J_{m,2m}(x)$$

$$+ \frac{2}{9} x J'_{o,o}(x) + \frac{1}{3} x J'_{1,2}(x)$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{4x}{9(m^2 - 1)} J'_{m,2m}(x),$$

où l'on pose $S_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}$.

---

# Sur une généralisation de la transformation de Hankel

PAR

R. P. AGARWAL,
Université de Lucknow
(présenté par M.P. HUMBERT)

---

**1.** La transformation de Hankel

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\lambda (xy)\, g(y)\, dy$$

$$g(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\lambda (xy)\, f(y)\, dy$$

a été généralisée de diverses façons. Dans ce qui suit, je propose une généralisation nouvelle en prenant pour noyau de l'équation intégrale l'expression

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\lambda x^{\lambda+\frac{1}{2}}\, J_\lambda^\mu \left(\frac{x^2}{4}\right)$$

où $J_\lambda^\mu$ est la fonction de Bessel-Maitland, définie par

$$J_\lambda^\mu (x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!\, \Gamma(1 + \lambda + \mu r)} \qquad \mu > 0$$

Pour $\mu = 1$, ce noyau se réduit au noyau de Hankel ordinaire.

**2.** Commençons par établir un Lemme :

*Lemme.* Si $f\left(\frac{1}{p^\mu}\right) \subset h(x)$, alors pour $\mu > 0$ et $R(\alpha) > -1$, on a

$$p^{-\alpha+\frac{1}{\mu}} f(p) \subset x^\alpha \int_0^\infty h(s)\, J_\alpha^{\frac{1}{\mu}} (sx^{\frac{1}{\mu}})\, ds$$

où J est la fonction de Bessel-Maitland, en admettant que $h$ soit une image et que l'intégrale converge.

En effet, nous avons

$$f\left(\frac{1}{p^\mu}\right) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx$$

d'où, par un changement de la variable $p$,

$$p^{-\alpha+\frac{1}{\alpha}} f(p) = p^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-p^{-\frac{1}{\mu}} x} h(x)\, dx$$

$$= p^{-\alpha} \int_0^\infty h(s) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{p^{\frac{r}{\mu}}\, r!}\, ds$$

En utilisant la formule

$$\Gamma(\nu+1)\, p^{-\nu} \subset x^\nu \qquad R(\nu) > -1$$

on voit que

$$\Sigma \frac{(-s)^r}{p^{\frac{r}{\mu}+\alpha}\, r!} \subset \Sigma \frac{(-s)^r\, x^{\frac{r}{\mu}+\alpha}}{r!\, \Gamma\left(1+\alpha+\frac{r}{\mu}\right)} = x^\alpha\, J_\alpha^{\frac{r}{\mu}}(sx^{\frac{1}{\mu}})$$

Donc

$$p^{-\alpha+\frac{1}{\mu}} f(p) \subset x^\alpha \int_0^\infty h(s)\, J_\alpha^{\frac{1}{\mu}}(sx^{\frac{1}{\mu}})\, ds$$

**3.** Nous tirerons de ce Lemme un *Théorème fondamental* :

Si

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda \int_0^\infty (xy)^{\lambda+\frac{1}{2}}\, J_\kappa^\mu\left(\frac{x^2y^2}{4}\right) g(y)\, dy \qquad (A)$$

alors

$$g(y) = \frac{1}{\mu}\, 2^{\lambda-2\frac{1+\lambda}{\mu}+3} \int_0^\infty (xy)^{\frac{2}{\mu}(1+\lambda)-\lambda-\frac{3}{2}}\, J^{\frac{1}{\mu}}_{\frac{1+\lambda}{\mu}-1}\left[\left(\frac{x^2y^2}{4}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right] f(x)\, dx$$

à condition que

$$g(x) = 0\,(e^{-x^2}) \text{ pour } x \text{ grand,}$$

$$g(x) = 0(x^\eta) \text{ pour } x \text{ petit}$$

avec $R\left(\eta+\lambda+\frac{3}{2}\right) > 0$ et $R(\mu) > 0$, $R(\lambda) > -1$

En effet : de (A), après un changement de variable évident, nous tirons

$$x^{-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} f\left(2x^{\frac{\mu}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty y^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}\, J_\lambda^\mu(x^\mu y)\, g(\sqrt{y})\, dy\,.$$

Multipliant les deux membres par $x^{\lambda}e^{-xq}$ et intégrant par rapport à $x$ entre 0 et l'infini,

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} f\left(2x^{\frac{\mu}{2}}\right) e^{-xq}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-xq}\,dx \int_0^{\infty} y^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g(\sqrt{y})\, J_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y)\,dy .$$

S'il est permis de changer l'ordre des intégrations, nous obtenons

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} f\left(2x^{\frac{\mu}{2}}\right) e^{-xq}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} y^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g(\sqrt{y})\,dy \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-xq}\, J_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y)\,dx .$$

Calculons l'intégrale en $x$ par développement en série (absolument convergente) : le second membre devient

$$\frac{1}{q^{\lambda+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} y^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g(\sqrt{y})\, e^{-\frac{y}{q^{\mu}}}\,dy ,$$

ce qui nous conduit à la relation symbolique

$$\varphi\left(\frac{1}{q^{\mu}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{q^{\lambda}} \int_0^{\infty} y^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g(\sqrt{y})\, e^{-\frac{y}{q^{\mu}}}\,dy \subset x^{\lambda-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} f(2x^{\frac{\mu}{2}}) .$$

D'après le Lemme, on a donc

$$q^{-\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)} \varphi(q) \subset x^{\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{\mu}-1} \int_0^{\infty} f(2y^{\frac{\mu}{2}}) y^{\lambda-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} J_{-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{\mu}-1}^{\frac{\lambda}{\mu}} (x^{\frac{1}{\mu}}y)\,dy,$$

d'où l'on peut aisément tirer

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} g(\sqrt{x}) = \int_0^{\infty} x^{\frac{\lambda+1}{\mu}-1} y^{\lambda-\frac{\mu\lambda}{2}-\frac{\mu}{4}} J_{\frac{\lambda+1}{\mu}-1}^{\frac{1}{\mu}} (x^{\frac{1}{\mu}}y)\, f(2y^{\frac{\mu}{2}})\,dy$$

ce qui conduit, par un changement de variable, à l'énoncé du Théorème fondamental.

Il reste à justifier le changement dans l'ordre des intégrations indiqué plus haut, on constatera qu'il est valide si $R(\lambda) > -1$, $R(q) > 0$ et $g(x) = 0$ $(e^{-x^2})$ pour $x$ grand, $g(x) = 0(x^{\eta})$ pour $x$ petit, avec $R\left((\eta + \lambda + \frac{3}{2}\right) > 0$.

En particulier, pour $\mu = 1$, les formules (A) et (B) se réduisent la transformation de Hankel. Nous appellerons, en général, les nctions $f$ et $g$ liées par la relation (A) un couple Hankelien géné-lisé.

Un cas intéressant est obtenu en faisant $\mu = \frac{1}{2}$. Le noyau

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} x^{\lambda+\frac{1}{2}} J_{\lambda}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

réduit à

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} x^{\lambda+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}\left\{\left(\frac{-4}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right) - \frac{x^2}{8}\left(\frac{-4}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{\lambda+1} J_{\lambda+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\right\}$$

le noyau résolvant $\lambda(x)$ à $\sqrt{\pi}\, 2^{-1-\lambda}\, x^{\frac{\lambda}{3}+\frac{11}{6}}\left[J_{\lambda,\lambda+\frac{1}{2}}\right]\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)$

$J_{m,n}(x)$ est la fonction de Bessel du troisième ordre, introduite ar P. Humbert.

$$J_{m,n}(x) = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{m+n}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)_o} F_2\left(m+1,\ n+1; -\frac{x^3}{27}\right)$$

Nous dirons qu'on a alors affaire à un couple Humbertien.

4. Donnons quelques exemples de couples Hankeliens généralisés.

a) Soit $g(y) = e^{-y^2}$

ors

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda} \int_{o}^{\infty} (xy)^{\lambda+\frac{1}{2}} J_{\lambda}^{\mu}\left(\frac{x^2y^2}{4}\right) e^{-y^2}\, dy$$

éveloppons la fonction de Bessel et intégrons terme à terme : nous ouvons, pour $R(\lambda) > -\frac{3}{2}$ et $\mu > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2^{\lambda+1}} x^{\lambda+\frac{1}{2}} \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\Gamma\left(r+\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right)}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^r$$

Le second membre se réduit, pour $\mu = 1$, c'est-à-dire dans le cas de la transformation de Hankel, à une fonction hypergéométrique, ${}_1F_1$.

b) pour $g(y) = \sqrt{y}\, K_\lambda(y)$, K étant la fonction de Bessel, on obtiendra

$$f(x) = x^{\lambda+\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+\lambda+r)}{\Gamma(1+\lambda+\mu r)} (-x^2)^r$$

c) Soit $\mu = \frac{1}{2}$, et prenons $f(x) = \sqrt{x})\, K_{-\frac{\lambda}{2}}(x^2)$

la relation (B) nous donne

$$g(y) = 2^{-1-3\lambda} \int_0^{\infty} (xy)^{\frac{5}{2}+3\lambda} J^2_{2\lambda+1}\left(\frac{x^4y^4}{16}\right) y^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{\lambda}{2}}(y^2)\, dy$$

En intégrant terme à terme, et se souvenant que

$$\int_0^{\infty} K_\nu(t) t^{\mu-1}\, dt = 2^{\mu-2}\, \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$$

(avec $|R(\nu)| < R(\mu)$), nous obtenons le couple Humbertien

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} K_{-\frac{\lambda}{2}}(x^2)$$

$$g(y) = 2^{-3-\frac{7}{2}\lambda} x^{3\lambda+\frac{5}{2}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{\lambda}{2}+1; \lambda+\frac{3}{2}; -\frac{x^4}{16}\right)$$

qui se simplifiera d'une façon intéressante si l'on fait $\lambda = 0$.

d) Enfin, en prenant

$$g(y) = y^{-\lambda-\frac{3}{2}+\frac{2}{\mu}(1+\lambda)} e^{-y^{\frac{2}{\mu}}}$$

on calculera aisément

$$f(x) = \mu \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{2^{\lambda+1}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

## Sciences Physiques et Chimiques

# La récession des nébuleuses extra-galactiques

(6e Partie) (1)

PAR

P. DRUMAUX

Professeur à l'Université de Gand

Sommaire. — Pour le calcul de la correction des magnitudes apparentes des nébuleuses, nécessitée par la récession, les équations de Dirac, appliquées aux quanta de lumière d'Einstein, donnent le même résultat que le simple recours à la relativité. Pour cette correction on peut donc indifféremment se baser soit uniquement sur la relativité soit sur la considération du « number-effect » et de l'« energy-effect » subis par les photons du fait de la récession.

Dans notre précédente communication nous avons abordé la question de la correction à faire subir aux magnitudes apparentes des nébuleuses du fait de leur mouvement de récession et nous avons calculé cette correction en nous basant sur la relativité.

Comme ce problème a généralement été traité en Astronomie en invoquant la théorie quantique de la lumière, nous nous proposons de montrer que les deux méthodes sont équivalentes, c'est-à-dire que si l'on donne la préférence à la conception corpusculaire de la lumière on aboutit au même résultat qu'en recourant uniquement à la relativité.

---

(1) Pour les précédentes parties de cette étude voir *Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelles* t. LXI (1947), Série I, 3e fascicule, décembre 1947, p. 228; t. LXII (1948), Série I, 1er fascicule, mars 1948, p. 27; t. LXII (1948), Série I, 2e fascicule, mai 1948, p. 74; t. LXIII (1949), Série I, 1er fascicule, mars 1949, p. 46; t. LXIV (1950), Série I, fascicule juin 1950, p. 31.

Voir aussi *Commentationes*. — Pontificia Academia Scientiarum. Anno XI, Vol. XI, N° 12 (1947), p. 721-750. Le mouvement de récession des nébuleuses extra-galactiques.

*Acta*. — Pontif. Acad. Scient. Anno XII, Vol. XII (1948), p. 347-349. Sur la récession des nébuleuses extra-galactiques.

Rappelons d'abord l'expression obtenue pour la correction nécessitée par la récession.

Cette correction est basée sur la relation suivante résultant de la relativité :

Si L est l'intensité d'une radiation monochromatique qui serait reçue d'une nébuleuse si celle-ci était au repos par rapport à l'observateur et L′ l'intensité lorsque la vitesse par rapport à celui-ci est $v$, la relativité donne :

$$\frac{L'}{L} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right)^2} \qquad (1)$$

où $\varphi$ est l'angle de la vitesse $v$ avec la direction dans laquelle se trouve la nébuleuse, cet angle étant supposé être mesuré dans le système d'axes de référence lié à l'observateur.

L'énergie reçue par le récepteur, par exemple la cellule photoélectrique, a subi par suite de la récession un premier affaiblissement exprimé par (1) suivi d'un second affaiblissement causé par l'absorption sélective due à l'atmosphère terrestre et par l'effet sélectif du télescope et du récepteur.

Soit A le facteur de réduction exprimant ce second affaiblissement. On aura en désignant par E′ l'énergie réellement reçue et par E celle qui aurait été reçue en l'absence de récession :

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right)^2} A \qquad (2)$$

En traduisant E′ et E en magnitudes $m'$ et $m$ on a :

$$m' - m = 2{,}5 \log \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) A} \qquad (3)$$

D'autre part la relativité donne, si $\lambda$ et $\lambda'$ sont respectivement les

longueurs d'onde d'une radiation lorsque la source est au repos ou en mouvement relativement à l'observateur :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

En introduisant l'effet Doppler $D \equiv (\lambda' - \lambda)/\lambda$ on aura :

$$D + 1 = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

de sorte que l'expression (3) de la correction à faire subir aux magnitudes apparentes peut se mettre sous la forme :

$$m' - m = 5 \log (D + 1) + 2{,}5 \log \frac{1}{A} \tag{6}$$

Cela étant nous nous proposons de montrer que la relation (1) peut s'obtenir dans l'interprétation quantique de la propagation de la lumière.

Partons des équations classiques de Dirac en l'absence de champ, à savoir avec les notations usuelles :

$$\begin{aligned}
&(p_4 + m_o c)\psi_1 + (p_1 + ip_2)\psi_4 + p_3\psi_3 = 0 \\
&(p_4 + m_o c)\psi_2 + (p_1 - ip_2)\psi_3 - p_3\psi_4 = 0 \\
&(p_4 - m_o c)\psi_3 + (p_1 + ip_2)\psi_2 + p_3\psi_1 = 0 \\
&(p_4 - m_o c)\psi_4 + (p_1 - ip_2)\psi_1 - p_3\psi_2 = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

où $\quad p_1 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad p_2 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} \qquad p_3 = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$

et $\quad p_4 = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ (8)

En remplaçant les $p_i$ par leurs expressions (8) les équations de Dirac deviennent :

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+m_o c\right)\psi_1-\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_3}{\partial z}=0$$

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+m_o c\right)\psi_2-\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_4}{\partial z}=0$$

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-m_o c\right)\psi_3-\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=0 \qquad (9)$$

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-m_o c\right)\psi_4-\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0$$

On sait que ces équations admettent comme solution une onde plane représentée par :

$$\psi_i = a_i\, e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt-p_x x-p_y y-p_z z)} \qquad (10)$$

où l'énergie W et la quantité de mouvement $\bar{p}$ du corpuscule animé d'une vitesse $\bar{v}$ sont respectivement :

$$W=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{et} \qquad \bar{p}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\bar{v}$$

et où les amplitudes $a_i$ satisfont aux relations [1] :

$$a_1=-\frac{p_z a_3+(p_x+ip_y)\,a_4}{\frac{W}{c}+m_o c} \qquad (11)$$

$$a_2=-\frac{(p_x-ip_y)\,a_3-p_z a_4}{\frac{W}{c}+m_o c} \qquad (12)$$

Supposons que la vitesse $\bar{v}$ soit dans le plan $Oyz$ et fasse un angle $\varphi$ avec l'axe $Oz$, on aura :

$$p_x=0 \qquad p_y=p\sin\varphi \qquad p_z=p\cos\varphi \qquad (13)$$

Dans le cas des quanta de lumière d'Einstein on a :

$$m_o=0 \qquad W=h\nu \qquad p=\frac{h\nu}{c} \qquad (14)$$

---

[1] L. de Broglie. — L'Electron magnétique, p. 163.

Alors $\psi_i$ devient :

$$\psi_i = a_i\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left(h\nu t - \frac{h\nu}{c}\sin\varphi\,.\,y - \frac{h\nu}{c}\cos\varphi\,.\,x\right)}$$

ou bien :

$$\psi_i = a_i\, e^{2\pi\nu i\left[t - \frac{1}{c}(\sin\varphi\,.\,y + \cos\varphi\,.\,x)\right]} \qquad (15)$$

où la phase $2\pi\nu\left[t - \frac{1}{c}(\sin\varphi\,.\,y + \cos\varphi\,.\,z)\right]$ est un invariant pour une transformation de Lorentz.

D'autre part, pour une telle transformation les relations d'invariance des équations de Dirac sont (1) :

$$\begin{aligned}
\psi'_1(x'y'z't') &= \psi_1(xyzt)\,Ch\,\frac{\gamma}{2} + \psi_3(xyzt)\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
\psi'_2(x'y'z't') &= \psi_2(xyzt)\,Ch\,\frac{\gamma}{2} - \psi_4(xyzt)\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
\psi'_3(x'y'z't') &= \psi_3(xyzt)\,Ch\,\frac{\gamma}{2} + \psi_1(xyzt)\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
\psi'_4(x'y'z't') &= \psi_4(xyzt)\,Ch\,\frac{\gamma}{2} - \psi_2(xyzt)\,Sh\,\frac{\gamma}{2}
\end{aligned} \qquad (16)$$

où $\quad Ch\,\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad$ et $\quad Sh\,\gamma = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (17)$

Compte tenu de l'invariance de la phase ces relations deviennent :

$$\begin{aligned}
a'_1 &= a_1\,Ch\,\frac{\gamma}{2} + a_3\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
a'_2 &= a_2\,Ch\,\frac{\gamma}{2} - a_4\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
a'_3 &= a_3\,Ch\,\frac{\gamma}{2} + a_1\,Sh\,\frac{\gamma}{2}\\
a'_4 &= a_4\,Ch\,\frac{\gamma}{2} - a_2\,Sh\,\frac{\gamma}{2}
\end{aligned} \qquad (18)$$

(1) *Ibidem*, p. 149.

D'autre part pour les quanta de lumière les équations (11) et (12) deviennent :

$$\begin{aligned} a_1 &= -(a_3 \cos\varphi + i a_4 \sin\varphi) \\ a_2 &= (a_4 \cos\varphi + i a_3 \sin\varphi) \end{aligned} \tag{19}$$

En remplaçant dans (18) on a :

$$\begin{aligned} a'_1 &= -\left(\cos\varphi \, Ch\,\frac{\gamma}{2} - Sh\,\frac{\gamma}{2}\right) a_3 - i \sin\varphi \, Ch\,\frac{\gamma}{2}\, a_4 \\ a'_2 &= i \sin\varphi \, Ch\,\frac{\gamma}{2}\, a_3 + \left(\cos\varphi \, Ch\,\frac{\gamma}{2} - Sh\,\frac{\gamma}{2}\right) a_4 \\ a'_3 &= \left(Ch\,\frac{\gamma}{2} - \cos\varphi \, Sh\,\frac{\gamma}{2}\right) a_3 - i \sin\varphi \, Sh\,\frac{\gamma}{2}\, a_4 \\ a'_4 &= -i \sin\varphi \, Sh\,\frac{\gamma}{2}\, a_3 + \left(Ch\,\frac{\gamma}{2} - \cos\varphi \, Sh\,\frac{\gamma}{2}\right) a_4 \end{aligned} \tag{20}$$

Cela étant, la probabilité de présence P′ du photon dans l'unité de volume pour l'observateur lié aux axes $O'x'y'z'$ est, en désignant par $a_i'^*$ l'amplitude conjuguée à $a_i'$ :

$$P' = a_1' a_1'^* + a_2' a_2'^* + a_3' a_3'^* + a_4' a_4'^*$$

tandis que la probabilité de présence dans les axes $Oxyz$ sera :

$$P = a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^* + a_4 a_4^*$$

Les équations (20) donnent alors sans difficulté l'expression suivante pour P′ :

$$P' = 2(Ch\,\gamma - \cos\varphi \, Sh\,\gamma)\,(a_3 a_3^* + a_4 a_4^*)$$

ou bien, compte tenu de (17) :

$$P' = 2\,\frac{1 - \beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(a_3 a_3^* + a_4 a_4^*) \tag{21}$$

D'autre part, dans les axes $Oxyz$ les équations (19) donnent aisément :

$$a_1 a_1^* + a_2 a_2^* = a_3 a_3^* + a_4 a_4^*$$

d'où :

$$P = 2\,(a_3 a_3^* + a_4 a_4^*)$$

En remplaçant dans (21) on aura :

$$\frac{P'}{P} = \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{22}$$

où $\varphi$ est, d'après les équations (13), l'angle de direction de propagation mesuré dans les axes $Oxyz$.

L'intensité lumineuse L étant proportionnelle au produit de la probabilité de présence P par l'énergie $h\nu$ d'un photon, on aura pour le rapport $L'/L$ dans les deux systèmes d'axes coordonnés :

$$\frac{L'}{L} = \frac{P'\nu'}{P\nu}$$

Or en vertu de la relativité, on a :

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

où $\varphi$ a la même signification que dans l'équation (22). On a donc :

$$\frac{L'}{L} = \frac{(1 - \beta \cos \varphi)^2}{1 - \beta^2} \tag{23}$$

A première vue cette équation paraît différer de l'équation (1) mais l'angle $\varphi$ dans (1) n'a pas la même signification que dans (23). Pour mettre l'équation (1) d'accord avec les notations classiques adoptées dans les calculs ci-dessus, cette équation devrait s'écrire :

$$\frac{L'}{L} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \dfrac{v}{c} \cos \varphi'\right)^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \varphi')^2} \tag{24}$$

et comme on a entre $\cos \varphi'$ et $\cos \varphi$ la relation :

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \beta}{1 - \beta \cos \varphi}$$

on vérifie aisément que (24) est identique à (23).

La théorie des quanta de lumière donne donc pour l'affaiblissement de l'intensité lumineuse des nébuleuses causé par la récession exacte-

ment le même résultat que celui obtenu en recourant uniquement à la théorie de la relativité.

Le calcul de la vitesse transversale des nébuleuses peut donc s'appuyer sur la relation (1) quelle que soit la conception à laquelle on donne la préférence pour la propagation de la lumière, que ce soit la conception purement relativiste ou bien celle de la mécanique ondulatoire des corpuscules de lumière. Dans cette seconde conception l'effet de réduction du nombre des photons causé par la récession et appelé « number-effect » [1] se traduit par une diminution de la probabilité de présence tandis que la réduction de l'énergie individuelle des photons, dite « energy-effect » correspond à l'effet Doppler relativiste.

Ce résultat peut sembler évident a priori mais il valait néanmoins d'être noté à cause de l'importance de l'effet Doppler dans la récession des nébuleuses.

Bien que les vitesses transversales de celles-ci soient aussi grandes que les vitesses radiales elles passent inaperçues par suite de la petitesse de l'effet Doppler transversal et une haute précision serait nécessaire dans les mesures pour les déceler; ce qui montre l'importance du calcul des corrections des magnitudes.

Il y a dès lors intérêt à ce que la validité des lois invoquées dans ce calcul soit établie par diverses voies, de manière à donner pleine satisfaction aussi bien à l'interprétation corpusculaire qu'à la relativité.

Dans ce problème de la récession toutes les difficultés théoriques sont surmontées si l'on se base uniquement sur deux lois qui sont actuellement solidement établies, à savoir la loi de la gravitation d'Einstein et la loi relativiste de l'effet Doppler. Notre intention a été de montrer que cette dernière concorde avec la conception quantique de la mécanique ondulatoire et que les calculs astronomiques basés sur cette conception présentent la même sécurité que ceux recourant uniquement à la relativité.

---

(1) E. Hubble. — The realm of the nebulae, p. 193.

# Contribution à l'étude du spectre Raman de la molécule $CD_3 - CD_2H$

PAR

MM. R. VAN RIET et M. de HEMPTINNE

Sommaire. — Nous avons mesuré les raies Raman de l'éthane pentadeutéré, $CD_3$-$CD_2H$, en phase liquide, et estimé leur état de dépolarisation. Nous proposons un essai d'attribution des fréquences que nous avons observées aux modes fondamentaux de vibration de $CD_3$-$CD_2H$. Nous terminons par un tableau qui résume les résultats acquis jusqu'ici dans l'étude des deutéro-éthanes.

Introduction. — Le spectre Raman de $CD_3$-$CD_2H$ n'a pas encore été étudié. Toutefois, Stitt [1], en cherchant à déterminer le degré de pureté de certains échantillons de $CD_3$-$CD_3$, signale quelques raies infra-rouge qu'il attribue à la molécule $CD_3$-$CD_2H$. L'auteur a pris le spectre infra-rouge d'un mélange de $CD_3$-$CD_3$ et de $CD_3$-$CD_2H$ et relève les fréquences de trois bandes d'absorption de l'éthane pentadeutéré à 2994, 1450 et 1305 $cm^{-1}$.

Nous avons également abordé l'étude du spectre infra-rouge de $CD_3$-$CD_2H$, dont les résultats détaillés feront l'objet d'une prochaine publication. Nous signalerons cependant dès maintenant quelques confirmations fort importantes apportées par le spectre infra-rouge à certaines raies Raman faibles ou douteuses.

Technique expérimentale. — L'éthane pentadeutéré a été obtenu par les réactions suivantes :

$$D_2C = CD_2 + DBr \rightarrow D_3C - CD_2Br \xrightarrow{+\,Mg} D_3C - CD_2BrMg$$

$$D_3C - CD_2BrMg \xrightarrow{+\,H_2O} D_2HC - CD_3$$

[1] F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 297 (1939).

Il faut donc s'attendre à recueillir en même temps que le $CD_3 — CD_2H$ quelques traces de $CD_2H — CD_2H$ dues à la présence de $H_2O$ dans $D_2O$.

Nous avons utilisé un spectrographe Cojean, en verre, à grande luminosité, jouissant dans la région 4350 Å d'une dispersion de 7 Å par millimètre.

Les tubes utilisés pour prendre le spectre de $CD_3$-$CD_2H$, préalablement liquifié, étaient du modèle adopté depuis plusieurs années en notre laboratoire et ont été décrits précédemment [1].

Nous avons microphotométré les spectres obtenus, ce qui a permis, d'une part de déceler avec certitude l'existence de certaines raies faibles et, d'autre part, d'obtenir des indications précieuses concernant l'intensité et la largeur de chaque raie Raman.

Fréquences observées. — Nous avons observé expérimentalement les fréquences suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2940 (*e, i, k, p*) | 2258 (*e, i, k*) | 2221 (*e, i, k*) | |
| 2205 (*e, i, k*) | 2150 (*e, i, k, g*) | 2134 (*e, i, k*) | 2118 (*e, i, k*) |
| 2081 (*e, i, k*) | 2065 (*e, k*) | 2002 (*e, k*) | 1453 (*e*) |
| 1296 (*e, k*) | 1304 (*e, k*) | 1130 (*e, i, k*) | 1114 (*e, k*) |
| 1104 (*e, k*) | 1073 (*e, k*) | 1058 (*e, k*) | 1003 (*e, k*) |
| 964 (*e, k*) | 906 (*e, k*) | 862 (*e, f, g, i, k*) | 802 (*k*) |
| 631 (*e, k*) | 527 (*e, k*). | | |

Les réactions de préparation du $CD_3$-$CD_2H$ font prévoir qu'une faible quantité de $CD_2H$-$CD_2H$ peut se former en même temps, et certaines raies intenses de ce produit pourront donc apparaître faiblement, soit dans le spectre Raman, soit dans le spectre infra-rouge de $CD_3$-$CD_2H$. C'est le cas, pensons-nous, pour les raies Raman 1104, 1114 et 1003: elles apparaissent très faiblement dans le spectre Raman de $CD_3$-$CD_2H$, tandis que dans le spectre infra-rouge de ce même produit elles n'apparaissent pas. Or, ces trois fréquences sont relevées dans le spectre Raman de $CD_2H$-$CD_2H$ où elles sont intenses et nous croyons devoir les attribuer à ce dernier corps.

La raie Raman 1453 est extrêmement faible et n'a pu être observée

---

[1] M. de Hemptinne, J. Jungers, J.M. Delfosse, *J. Chem. Phys.* 6, 319 (1938).

n provenance de la raie excitatrice *k* du mercure ni dans la microhotométrie.

Cependant, Stitt (1) la signale en infra-rouge; il a pu l'observer en utilisant un prisme en $CaF_2$ : les conditions expérimentales dans esquelles nous nous trouvions ne nous ont pas permis d'en obtenir une vérification.

La raie Raman 1073 est recouverte par la raie 1058 qui est large et diffuse; la microphotométrie indique une légère inflexion dans a région (*k*) et dans la région (*e*). Le spectre infra-rouge apporte, pensons-nous, une précieuse confirmation de l'existence en Raman de 1073 en révélant une très forte absorption pour cette fréquence.

Enfin, les basses fréquences 631 et 527 de très faible intensité dans le spectre Raman, ont été aisément observées en infra-rouge.

Polarisation. — L'étude de la polarisation des raies Raman conduit aux résultats qualitatifs suivants :

| | | |
|---|---|---|
| 2940 (0,2 *p*) | 2258 (0,2 *p*) | 2221 (0,7 *dp*) |
| 2205 (0,7 *dp*) | 2150 (0,1 *p*) | 2118 (0,2 *p*) |
| 2081 (0,1 *p*) | 2065 (0,5 *dp*) | 1296 (0,7 *dp*) |
| 1304 (0,7 *dp*) | 1130 (0,1 *p*) | 1058 (0,7 *dp*) |
| 862 (0,1 *p*). | | |

Il ne nous a pas été possible d'estimer l'état de dépolarisation des autres fréquences mentionnées dans nos mesures, bien que la durée d'exposition ait été de 153 heures.

## Attribution des fréquences observées aux modes normaux de vibration

Si l'on attribue aux molécules $C_2H_6$ et $C_2D_6$ la symétrie $D_{3d}$, c'est-à-dire la configuration « étoile », les vibrations propres de ces molécules se classent en trois modes $A_{1g}$, un mode $A_{1u}$, deux modes $A_{2u}$, trois modes dégénérés $E_u$ et trois modes dégénérés $E_g$. Dans $CD_3$-$CD_2H$, le seul élément de symétrie est le plan C-C-H et les modes normaux seront donc, ou bien symétriques par rapport à ce plan : modes A′, ou bien antisymétriques : modes A″.

Les neuf modes de symétrie A′ donnent lieu à des raies Raman

(1) F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 297 (1939).

polarisées, tandis que les neuf modes de symétrie A'' correspondent à des raies Raman dépolarisées.

## A. — Vibration de valence

### 1. *Vibration de valence* C-C, $\nu_3(A')$

C'est la seule attribution tout à fait évidente : la raie Raman très intense, mince et polarisée 862 $cm^{-1}$ explique correctement la vibration $\nu_3(A')$. Nous avons retrouvé cette fréquence en absorption infra-rouge alors que Posey et Barker [1] ne l'ont pas observée pour le $CH_3$-$CH_2D$.

### 2. *Vibrations de valence* C-H *et* C-D

Nous désignerons ces vibrations par les notations : $\nu_1(A')$, $\nu_5(A')$, $\nu_7(A'$ et $A'')$, $\nu_{10}(A'$ et $A'')$; il y a cinq vibrations de valence C-D et une vibration de valence C-H. Les fréquences de ces vibrations se situent respectivement vers 2150 et 2950 $cm^{-1}$.

Comme les fréquences que nous avons mesurées ne contiennent qu'une seule haute fréquence, à savoir, 2940 $cm^{-1}$, celle-ci correspond à la vibration C-H. D'autre part,la raie Raman 2940 $cm^{-1}$ est polarisée et doit donc être attribuée à un mode de symétrie A'. Nous proposons de faire l'attribution : $\nu_7(A') = 2940\ cm^{-1}$.

Cette interprétation est basée sur les identifications que nous avons faites précédemment pour le $CH_3$-$CH_2D$ [2]. En effet, pour ce produit, la vibration $\nu_7$, qui est dégénérée dans $C_2H_6$ et $C_2D_6$, fournit par levée de la dégénérescence, une vibration $\nu_7(A')$ polarisée, qui est principalement une vibration C-D, identifiée à 2176 $cm^{-1}$ et une vibration C-H dépolarisée, identifiée à $\nu_7(A'') = 2977\ cm^{-1}$.

Comme il ressort de l'étude des radicaux méthyles mixtes [3], ces vibrations sont caractéristiques du groupe $CH_2D$, pour lequel la basse fréquence est polarisée, tandis que la haute fréquence est dépolarisée. Or, dans la molécule $CD_3$-$CD_2H$, dont la symétrie est la même que celle de la molécule $CH_3$-$CH_2D$, il y a un groupe d'atomes analogue à $CH_2D$, à savoir, le groupe $CD_2H$. Les vibrations

---

[1] L.R. Posey and E.F. Barker, *J. Chem. Phys.*, 10, 146 (1942).

[2] M. de Hemptinne et R. Van Riet, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, 63, 104 (1949).

[3] M. de Hemptinne et Th. Doehaerd, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 31, 497 (1946).

caractéristiques de ce groupe doivent comporter également, comme pour $CH_2D$, une vibration C-H et une vibration C-D. Seulement, la théorie prévoit que pour $CD_2H$ la vibration C-D sera dépolarisée tandis que la vibration C-H sera polarisée. De là, l'identification de 2940, qui est polarisée, comme étant $\nu_7(A')$.

Quant à la vibration $\nu_7(A'')$, qui est une vibration C-D, elle ne peut être interprétée que par 2221 ou 2205, qui sont les seules fréquences dépolarisées observées dans cette région. Nous choisissons $\nu_7(A'') = 2205$, parce que l'attribution de 2221 est, de ce fait, légèrement mieux justifiée.

D'après Stitt [1], la vibration symétrique $\nu_1(A_{1g})$ de $C_2D_6$ est interprétée par la fréquence Raman intense et polarisée 2083 $cm^{-1}$. Celle-ci, toujours pour le $C_2D_6$, formerait un doublet Fermi avec 2147, qui est également une raie forte et polarisée. L'auteur est conduit, dit-il, à impliquer la vibration $\nu_1$ de $C_2D_6$ dans un doublet Fermi parce que, d'une part, on observe deux fortes raies Raman polarisées (2147 et 2083) alors qu'une seule raie intense est attendue dans cette région et que, d'autre part, l'intensité des raies observées s'oppose à l'interprétation de l'une d'elles comme raie de combinaison.

En cherchant à identifier la vibration $\nu_1(A')$ du $CD_3$-$CD_2H$, il convient donc d'examiner si cette vibration donne lieu, comme pour le $C_2D_6$, à un effet de résonance Fermi. En effet, l'observation du spectre révèle les deux fréquences 2150 et 2081 qui sont particulièrement intenses et toutes deux nettement polarisées. La concordance des mesures du $C_2D_6$ (2147 et 2083) avec celles du $CD_3$-$CD_2H$ (2150 et 2081) paraît justifier l'existence d'un doublet Fermi.

Il nous paraît utile de signaler que pareille interprétation de 2150-2081 comme doublet Fermi pour le $CD_3$-$CD_2H$ donne lieu à certaines difficultés. En effet, l'interprétation de Stitt pour le doublet Fermi de $CD_3$-$CD_3$ repose sur l'existence d'une trop grande abondance de fréquences Raman intenses par rapport au nombre de vibrations à identifier. Or, pour le $CD_3$-$CD_2H$, toutes les vibrations deviennent actives en Raman et en absorption infra-rouge et, en plus, donnent lieu à des levées de dégénérescence. De ce fait, les fréquences expérimentales dues aux vibrations C-D et observables en Raman sont, pour le $CD_3$-$CD_2H$, beaucoup plus nombreuses (5 vibrations C-D et toutes sont observables) qu'elles ne le sont pour le $CD_3$-$CD_3$ (6 vi-

[1] F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 217 (1939).

brations C-D, 2 sont observables en Raman et l'une des deux est dégénérée). Dès lors, n'y a-t-il pas lieu de chercher à identifier la vibration $\nu_5(A')$ au moyen d'une fréquence expérimentale intense et polarisée, telle que l'est précisément 2150 $cm^{-1}$, plutôt que d'impliquer cette dernière raie dans un doublet Fermi ?

Suivant la position adoptée dans l'interprétation des raies 2150-2081, on aboutit donc aux conclusions suivantes: si ces raies ne sont pas dues aux composantes d'un doublet Fermi causé par $\nu_1$, leur interprétation pourrait être : $\nu_1 = 2081$ et $\nu_5 = 2150$, et cette interprétation donnerait un bon accord avec celle de Stitt pour le $CD_3$-$CD_3$ : $\nu_1 = 2083$, $\nu_5 = 2111$.

S'il y a doublet Fermi pour $\nu_1$, comme nous le pensons, on aura $\nu_1 = 2083\text{-}2150$, mais alors, la vibration $\nu_5$ doit être expliquée par une autre fréquence expérimentale. La meilleure valeur à proposer serait $\nu_5(A') = 2118$, polarisée et moyennement intense.

Des deux hypothèses indiquées, il nous semble que c'est la seconde qui doit être retenue, parce que, si l'on voulait s'attacher à la première, pour laquelle les vibrations $\nu_1$ et $\nu_5$ sont toutes les deux expliquées par des raies Raman intenses et polarisées, il faudrait trouver également pour le $CH_3$-$CH_2D$ deux raies correspondant à des vibrations C-H, c'est-à-dire situées vers les 2900 $cm^{-1}$, et qui soient particulièrement intenses. Or, ce couple de raies intenses n'a pas été observé dans le spectre Raman de $CH_3$-$CH_2D$, et nous avons attribué la raie 2883 de ce produit à la vibration $\nu_1$ et à la vibration $\nu_5$. En plus, s'il est normal d'attendre que la vibration $\nu_5(A')$ du $CD_3$-$CD_2H$ apparaisse en Raman, bien qu'elle corresponde à une vibration $\nu_5(A_{2u})$ du $CD_3$-$CD_3$ qui est interdite en Raman, il nous paraîtrait surprenant que $\nu_5(A')$ puisse avoir une intensité comparable avec celle des plus fortes raies Raman observées dans nos spectres.

Ce raisonnement pourrait être confirmé par l'observation de la fréquence 2118 en absorption infra-rouge, où elle pourrait se révéler très intense si elle est réellement due à la vibration $\nu_5(A')$du $CD_3$-$CD_2H$, puisque la vibration correspondante du $CD_3$-$CD_3$, $\nu_5(A_{2u})$, est active en absorption infra-rouge et inactive en Raman. Nos mesures en infra-rouge ne nous permettent pas d'obtenir, pour le moment, les indications désirées.

Il reste à identifier les deux composantes de la vibration $\nu_{10}$. L'une d'elles, $\nu_{10}$ (A''), doit être dépolarisée et peut être convenablement expliquée par la seule fréquence dépolarisée qui n'a pas encore été

attribuée, à savoir, 2221 $cm^{-1}$, raie assez large, assez intense et dépolarisée.

L'autre composante, $\nu_{10}(A')$, doit être polarisée et plus élevée que la composante A'', comme le prévoit la théorie; nous proposons l'attribution $\nu_{10}(A') = 2258\ cm^{-1}$, raie assez intense et polarisée.

### B. — Vibrations de déformation

Ces vibrations sont désignées pour le $C_2D_6$, en configuration staggered, par $\nu_2(A_{1g})$, $\nu_6(A_{2u})$, $\nu_8(E_u)$ et $\nu_{11}(E_g)$. Pour étudier les déformations de $CD_3$-$CD_2H$, nous garderons les mêmes notations et les lettres entre parenthèses renseigneront la symétrie A' ou l'antisymétrie A'' par rapport au plan C-C-H. Il y a donc lieu de considérer, l'identification des vibrations suivantes : $\nu_2(A')$, $\nu_6(A')$, $\nu_8(A'$ et $A'')$ $\nu_{10}(A'$ et $A'')$.

a) $\nu_2(A')$

La déformation symétrique de $C_2D_6$ a été identifiée par Stitt [1] à 1158 $cm^{-1}$, raie Raman polarisée et d'intensité moyenne. Pour l'éthane léger, les auteurs ont choisi 1375 $cm^{-1}$, valeur non observée en Raman mais déduite d'une bande de combinaison en infra-rouge. Récemment, Posey et Parker [2] calculaient également $\nu_2(A')$ pour le $CH_3$-$CH_2D$ à 1365 $cm^{-1}$, sans pouvoir l'observer en absorption infra-rouge, tandis que nous-mêmes [3] proposions d'attribuer à cette vibration la raie Raman 1350 $cm^{-1}$ de faible intensité et dont l'état de dépolarisation n'est pas connu.

Dans le spectre Raman particulièrement intense de $CD_3$-$CD_2H$ que nous possédons, nous n'avons pas observé de fréquence d'une valeur au moins égale à 1158 $cm^{-1}$ et qu'il soit possible d'attribuer à $\nu_2(A')$. En outre, le spectre infra-rouge du même produit dont l'étude est en cours, ne paraît pas devoir contenir de bande de l'ordre de grandeur attendu, et l'identification semble devoir dépendre une nouvelle fois de l'explication donnée à une bande de combinaison infra-rouge ou à une raie Raman de combinaison.

---

(1) F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 297 (1939).

(2) L.R. Posey and E.F. Barker, *J. Chem. Phys.*, 10, 146 (1942).

(3) M. de Hemptinne et R. Van Riet, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, 63, 104 (1949).

b) $\nu_6(A')$

La déformation antisymétrique de $C_2D_6$ donne lieu à la bande perpendiculaire 1072 $cm^{-1}$. Nous avons commenté ci-dessous la faible raie Raman 1073 $cm^{-1}$ et indiqué la confirmation très parlante que lui apporte la bande infra-rouge de même fréquence. Il est, du reste, assez fréquent que des modes actifs en infra-rouge, tel que $\nu_6$ ($A_{2u}$), pour $C_2D_6$ puissent n'apparaître que très faiblement en Raman bien que les règles de sélection le permettent, comme c'est le cas pour $\nu_6(A')$ du $CD_3$-$CD_2H$.

c) $\nu_8(A'$ *et* $A'')$

Ces deux vibrations résultent de la levée de dégénérescence de $\nu_8(E_u) = 1102\ cm^{-1}$ dans le $C_2D_6$. Pour la vibration $\nu_8(A'')$, on pourrait faire l'attribution : $\nu_8(A'') = 1305\ cm^{-1}$, qui est une raie Raman d'intensité moyenne et dépolarisée; cette fréquence se retrouve en infra-rouge où elle donne lieu à une forte absorption, l'allure de la bande étant toutefois difficile à déterminer. Si l'on accepte cette attribution, il faudrait assigner à $\nu_8(A')$ une raie Raman polarisée qui ne soit pas de fréquence trop élevée par rapport à 1102. Pareille raie existe : 1130 $cm^{-1}$; nous préférons cependant réserver une autre attribution à 1130 (cfr ci-après) et laisser ouverte l'attribution de $\nu_8(A')$.

d) $\nu_{11}(A'$ *et* $A'')$

En proposant récemment une explication du spectre Raman de $CH_3$-$CH_2D$ [1], nous avions indiqué les attributions suivantes :

| | |
|---|---|
| $\nu_8(A'') = 1306\ dp$ | $\nu_{11}(A'') = 1460$ |
| $\nu_8(A') = 1460\ p$ ? | $\nu_{11}(A')$ non observé. |

Or, si l'on se reporte aux schémas de vibration désignés respectivement par $\nu_8$ et $\nu_{11}$, on aperçoit facilement que, du point de vue symétrie, $\nu_8$ est d'espèce $E_u$ et $\nu_{11}$ d'espèce $E_g$ pour les molécules $C_2H_6$ et $C_2D_6$ en configuration $D_{3d}$. La substitution d'un H à un D qui différencie $CD_3$-$CD_2H$ de $C_2D_6$, mécaniquement parlant, fait tomber la symétrie $D_{3d}$ à une sumétrie $C_s$ (plan de symétrie) et lève la dégénérescence des modes $E_u$ et $E_g$. Il en résulte que les vibrations de déformation $\nu_8(E_u)$ et $\nu_{11}(E_g)$ ont simplement donné lieu, chacune, à une vibration

---

[1] M. de Hemptinne et R. Van Riet, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, 63, 104 (1949).

A′ et à une vibration A″ pour lesquelles les indices 8 et 11 sont devenus sans valeur puisque tous les modes de vibration de $CD_3$-$CD_2H$ sont ou bien de type A′ ou bien de type A″. Qu'il nous soit donc permis dès à présent, ainsi qu'au tableau récapitulatif, de noter pour le spectre Raman de $CH_3$-$CH_2D$ :

| | |
|---|---|
| $\nu_{11}(A'') = 1306\ dp$ | $\nu_8(A'') = 1460$ |
| $\nu_{11}(A') = 1460\ p$ ? | $\nu_8(A') =$ non observé |

L'accord avec les valeurs connues pour le $C_2H_6$ demeure ainsi tout aussi satisfaisant.

Cette mise au point permet, croyons-nous, de proposer pour le $CD_3$-$CD_2H$ une identification de $\nu_{11}(A')$ et $(A'')$ en meilleur accord avec $\nu_{11}(E_g) = 1055\ cm^{-1}$ du $C_2D_6$ et découlant de l'application du même principe qui nous avait servi de guide dans l'étude de $\nu_{11}$ du $CH_3$-$CH_2D$ : les conclusions très nettes de l'étude des radicaux $CH_3$, $CH_2D$, $CD_2H$ et $CD_3$ prévoient la déformation dégénérée de $CD_3$ à $1055\ cm^{-1}$ et les déformations de $CD_2H$ à $1105\ cm^{-1}$ polarisée et $1292\ cm^{-1}$ dépolarisée (1). C'est ce qui nous a conduit à proposer pour $\nu_{11}(A')$ la fréquence expérimentale $1130\ cm^{-1}$ polarisée et pour $\nu_{11}(A'')$ la fréquence $1296\ cm^{-1}$ nettement dépolarisée.

### C. — Vibrations de flexion

a) $\nu_9(A'$ *et* $A'')$

Pour le $C_2D_6$, Stitt (2) propose d'attribuer à la vibration dégénérée $\nu_9(E_u)$ la bande perpendiculaire de fréquence $601\ cm^{-1}$. Nous observons dans le spectre Raman — et le spectre infra-rouge confirme — une raie très faible, dont l'état de dépolarisation n'est pas mesurable et dont le nombre d'ondes est $631\ cm^{-1}$. Ce nous est un nouvel exemple d'une vibration uniquement active en infra-rouge pour le $C_2D_6$ se traduisant pour le $CD_3$-$CD_2H$ par une raie Raman très faible alors qu'en infra-rouge elle apparaît avec une intensité notable. Malheureusement, comme nous ne pouvons pas estimer son état de polarisation en Raman, ni, dans l'état actuel de nos recherches, la structure fine en infra-rouge, il n'est pas possible de dire si $631\ cm^{-1}$ doit être attribué à un mode A′ ou à un mode A″.

(1) M. de Hemptinne et Th. Doehaerd, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, 31, 497 (1946).
(2) F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 297 (1939).

Une seconde fréquence expérimentale du même ordre de grandeur serait à attendre pour $v_9$. Les données expérimentales encore disponibles sont 802, 527 $cm^{-1}$.

Pour la première de ces deux fréquences nous pensons devoir faire objection quant à son attribution à $v_9$ par ce que nous n'avons pu la déceler dans le spectre infra-rouge; d'autre part, la seconde fréquence disponible, 527 $cm^{-1}$, nous semble trop basse pour l'attribution envisagée. Une fréquence de grandeur raisonnable qui pourrait expliquer la seconde vibration $v_9$ dont il est question est peut-être la bande d'absorption infra-rouge que nous avons observée à 724 $cm^{-1}$.

b) $v_{12}(A'$ *et* $A'')$

En bon accord avec la valeur 970 $cm^{-1}$ dépolarisée proposée par Stitt [1] pour $v_{12}(E_g)$, on peut attribuer à $v_{12}(A''')$ la fréquence expérimentale 1058 $cm^{-1}$ qui est dépolarisée, tandis que $v_{12}(A')$ pourrait être expliquée par 964 $cm^{-1}$ dont l'état de dépolarisation n'est pas connu. Ces deux fréquences sont bien confirmées par le spectre infra-rouge.

## D. — La vibration de Torsion $v_4(A_{1u})$

Inactive pour l'éthane léger et l'éthane lourd, la vibration de torsion a été estimée pour ces deux corps respectivement à 275 et 200 $cm^{-1}$ [1]. En considérant la fréquence expérimentale 527 $m^{-1}$ comme $2 \times v_4$, a vibration de torsion se situerait à 263 $cm^{-1}$ et permettrait une explication convenable de certaines raies de combinaison.

## E. — Raies de combinaison

L'interprétation des fréquences de combinaison pourrait être :

$2134 = 2 \times 1058 = 2116$

$2002 = 1130 + 862 = 1992$

$906 = 263 + 631 = 894$

$2065 = 2 \times 631 + 3 \times 263 = 2051$

$1453 = 2 \times 724 = 1448$

$803 = 3 \times 263 = 789$

---

[1] G.B. Kistjakowsky and F. Stitt, *J. Chem. Phys.*, 7, 289 (1939).

On trouvera dans le tableau suivant les résultats déjà connus au sujet des éthanes, ainsi que ceux que nous venons de proposer.

TABLEAU

| | | $C_2H_6$ | $C_2H_5D$ I.R | $C_2H_5D$ Raman | $C_2H_5D$ Raman | $C_2D_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1g}$ | $\nu_1$ | 2899 *p* | A′2892 | 2883 *p* | 2150 *p* | 2147 *p* |
| | | 2955 *p* | 2953 | 2965 | 2081 *p* | 2083 *p* |
| | $\nu_2$ | 1375** | A′1365** | 1350 | — | 1158 *p* |
| | $\nu_3$ | 993 *p* | A′ — | 977 *p* | 862 *p* | 852 *p* |
| $A_{1u}$ | $\nu_4$ | 275** | — | — | 263** | 200 |
| $A_{2u}$ | $\nu_5$ | 2894 | A′2897 | 2883 *p* | 2118 *p* | 2111 |
| | | 2954 | 2949 | — | — | 2087 |
| | $\nu_6$ | 1379 | A′1388 | 1384 | 1073 | 1072 |
| $E_u$ | $\nu_7$ | 2989 | A″2981 | 2977 *dp* | 2205 *dp* | 2236 |
| | | | A′ 2180 | 2176 *p* | 2938 *p* | |
| | $\nu_8$ | 1480 | A″1468 | 1460 | 1305 *dp* | 1102 |
| | | | A′ 1312 | — | — | |
| | $\nu_9$ | 821 | A″ 804 | 805 | (724) | 601 |
| | | | A′ 715 | 717 | 631 | |
| $E_g$ | $\nu_{10}$ | 2960 *dp* | A″ — | 2953 *dp* | 2221 *dp* | 2225 *dp* |
| | | | A′ — | 2938 *p* | 2258 *p* | |
| | $\nu_{11}$ | 1460 *dp* | A″1477* | 1306 *dp* | 1296 *dp* | 1055 *dp* |
| | | | A′ 1310 | 1460 *p* | 1130 *p* | |
| | $\nu_{12}$ | 1170 *dp* | A″1159 | 1157 | 1058 *dp* | 970 *dp* |
| | | | A′ 1122 | 1117 | 964 | |

Université de Louvain,
Laboratoire de Physique
nucléaire et moléculaire.

# Étude au Spectromètre de masse de la décomposition du Germane sous l'influence du bombardement électronique

PAR

M. NÈVE DE MÉVERGNIES*

et

J.M. DELFOSSE

SOMMAIRE. — Le Spectromètre utilisé est un appareil type Dempster, construit en Pyrex. Le champ magnétique est fourni par un aimant permanent en Alnico. Les courants ioniques sont mesurés au moyen d'une lampe électromètre FP54 actionnant un Galvanomètre. Le pouvoir de résolution vaut 180 environ.

L'Hydrure de Germanium $GeH_4$ a été étudié au moyen de cet appareil. Les probabilités de formation ainsi que les potentiels d'apparition des différents fragments ont été déterminés. Des radicaux libres sont formés simultanément par dissociation thermique. Les résultats obtenus fournissent une estimation de l'énergie moyenne de la liaison Ge-H.

## A. DESCRIPTION DE L'APPAREIL

Le spectromètre de masse utilisé est représenté à la figure 1. Il est construit en pyrex. Les ions accélérés par les fentes (6) décrivent dans le tube (16) des trajectoires circulaires de 150 mm de rayon et pénètrent par la fente de sortie (18) dans le collecteur (19). Afin d'imprimer aux ions une direction correcte dans le tube (16), deux réglages ont été prévus : le premier permet en agissant sur le rodage (8) de modifier l'orientation du faisceau dans un plan perpendiculaire à celui de la trajectoire, le second permet de modifier l'orientation dans le plan même de la trajectoire. Il est réalisé grâce

* Bourse de spécialisation de l'I.R.S.I.A.

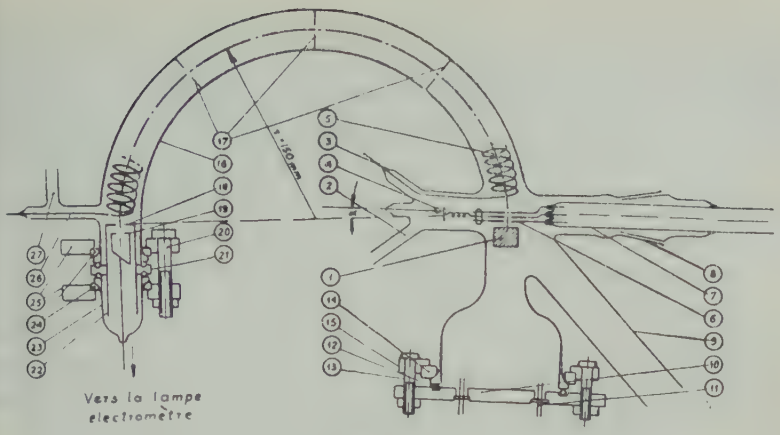



FIG. 1

à un champ électrique transversal réglable produit entre les deux moitiés de la fente intermédiaire. Le tube (16) est faradisé grâce à un boudin de fil Brightray (alliage, non magnétique 80 % Ni, 20 % Cr) de 0,7 mm de diamètre glissé à l'intérieur. Avant d'utiliser l'appareil, on fait jouer à ce boudin le rôle de four électrique en raccordant ses extrémités (3) et (26) à une source de tension continue. Cette opération assure un bon dégazage de l'appareil. Trois caches circulaires (17) de 1 cm de diamètre soudées au boudin définissent l'angle d'ouverture du pinceau d'ions.

La figure 2 représente la source ionique, son système d'attache et le réglage par tube flexible du filament. C'est une source à bombardement électronique du type classique permettant l'analyse des gaz et la mesure des potentiels d'apparition des fragments moléculaires produits. Les électrons accélérés par (1) et (3) pénètrent dans

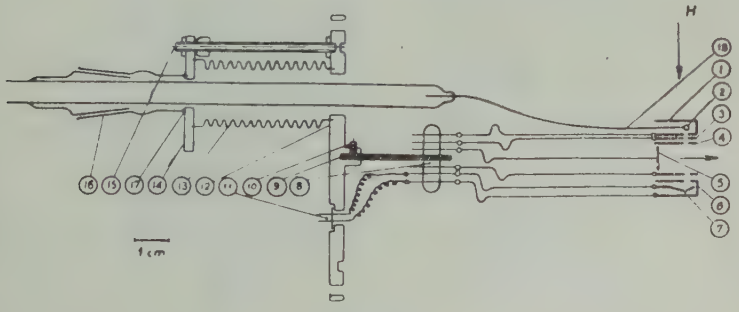



FIG. 2

la chambre d'ionisation (4); l'énergie des électrons dans cette boîte est fixée par la tension appliquée entre le filament et (4). Les ions formés sont lancés dans l'appareil suivant la direction de la flèche par une tension auxilliaire appliquée entre le fond (5) de la chambre et la première fente accélératrice des ions (non représentée sur la figure). Après avoir traversé la chambre d'ionisation, les électrons sont collectés sur l'électrode (7), entourée d'une boîte de protection(6). Les fentes accélératrices des électrons sont alignées suivant une direction parallèle aux lignes de forces du champ magnétique, ce qui maintient le pinceau dans la bonne direction. La source est raccordée à un disque de laiton (12); un joint en caoutchouc néoprène comprimé entre le disque et l'extrémité du tube de pyrex épaissi et rodé assure l'étanchéité de l'appareil.Le courant d'ions est mesuré au moyen d'une lampe électromètre et d'un galvanomètre monté en pont de Wheatstone, suivant le circuit classique de Penick (réf. 1).

La tension accélératrice des ions comprend un transformateur haute tension, deux cellules de filtrage et une stabilisation par deux pentodes. Un système potentiométrique analogue à celui employé par A.O. Nier (réf. 2) permet par un jeu de boutons une variation de tension de 2.000 à 200 Volts par bonds de 0,2 volts. L'aimant utilisé est un aimant permanent construit par les Usines Henricot; le noyau est constitué de parrallélipipèdes en « Red Alnico », les dimensions de l'entrefer sont $20 \times 4 \times 3$ cm et le champ magnétique est de 2490 gauss. Son homogénéité et sa stabilité se sont révélés parfaitement suffisants pour nos mesures. Cet aimant est présenté à la fig. 3.

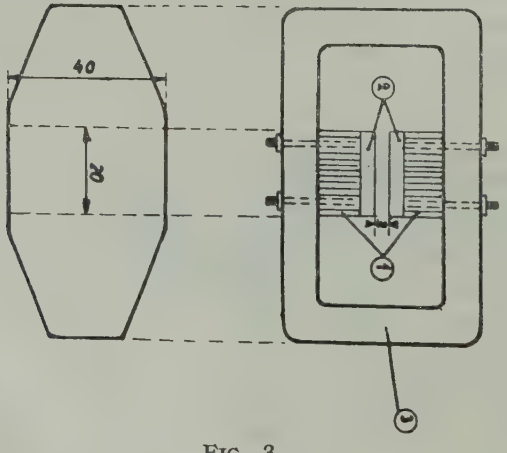



Fig. 3

Le pouvoir de résolution théorique est de 215. La fig. 4 représentant l'enregistrement des ions doublement chargés des isotopes du mercure montre que l'on atteint 180 environ. La fig. (5) représente l'enregistrement des isotopes du Krypton, pour une fente de sortie de 1 mm de large.

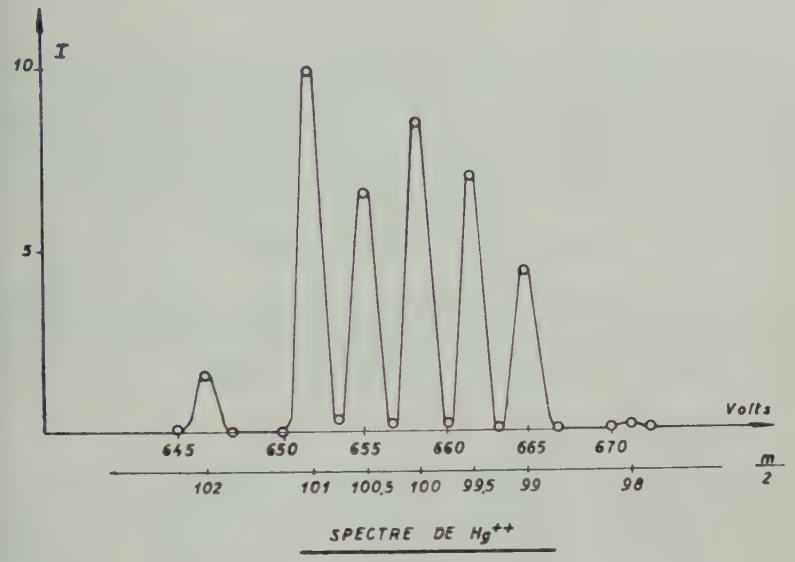



FIG. 4

B. ÉTUDE DU GERMANE

Le $GeH_4$ est obtenu par électrolyse d'une solution d'oxyde de Germanium dans l'acide sulfurique. L'Hydrogène dégagé à la Cathode se combine avec l'ion $Ge^{++++}$; il se dégage donc un peu de $GeH_4$ en même temps que de l'Hydrogène. Ces deux gaz se séparent facilement. Le $Ge_2H_6$ formé dans la réaction est en quantité négligeable.

Le Germane est introduit dans l'appareil au moyen d'un capillaire. En faisant varier la pression en amont de celui-ci on peut régler la pression de Germane dans le spectromètre entre $5.10^{-5}$ et $5.10^{-6}$ mm de Hg.

Sous l'influence du bombardement électronique apparaissent, compte tenu des cinq isotopes du Germanium, les 25 groupements moléculaires $GeH_4^+$, $GeH_3^+$, $GeH_2^+$, $GeH^+$, $Ge^+$ indiqués au tableau I.

Ces groupements d'ions sont compris entre les masses 80 et 70 et leurs abondances relatives sont représentées au tableau II.

TABLEAU II

| $\frac{m}{e}$ | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 | 71 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % relatifs | 0,0 | 15,0 | 17,8 | 75,4 | 100,0 | 91.0 | 99,6 | 66,2 | 74,1 | 12,3 | 21,1 |

On peut à partir de ces deux tableaux former un système de 10 équations dont les inconnues sont les abondances relatives des ions $GeH_4^+$, $GeH_3^+$, $GeH_2^+$, $GeH^+$ et $Ge^+$. La solution de ce système calculée par la méthode des moindres carrés donne le résultat suivant

$$GeH_4^+ < 0{,}01; \quad GeH_3^+ = 93{,}1; \quad GeH_2^+ = 100;$$
$$GeH^+ = 28{,}5; \quad Ge^+ = 50{,}7.$$

Ces solutions vérifient un groupe quelconque des 10 équations à 1,7 % près; l'erreur de mesure étant de l'ordre de 0,7 %, il est probable que le gaz contient des traces d'impuretés.

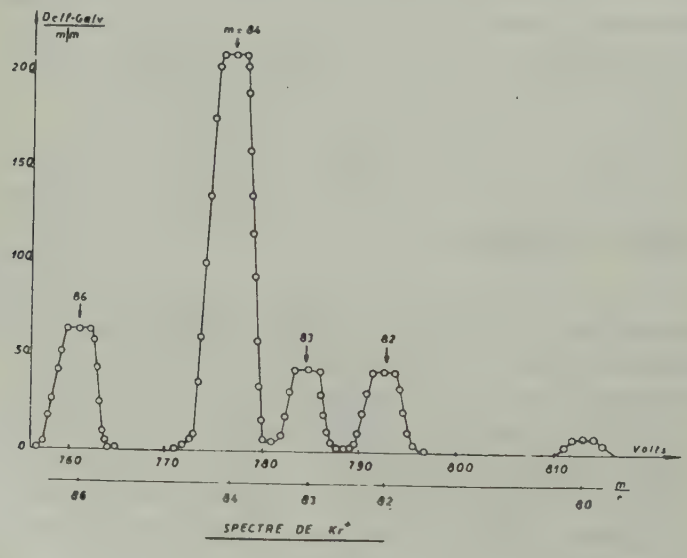



FIG. 5

Les potentiels d'apparition ont été mesurés par la méthode classique en utilisant comme gaz de référence le Krypton (potentiel d'ionisation : 13,95 v.).

1) $GeH_3^+$ : Ce potentiel d'apparition a été déterminé en relevant

les points de départ des courbes d'ionisation relatives aux ions de masse 79, 77, 76, 75 et 73 (cf. Tableau I); la courbe relative à l'ion $GeH_3^+$ de masse 77 est représenté à la figure (6). La moyenne de 10 mesures a donné 12,3 ± 0,1 volts.

TABLEAU I

| | 7,8 % | 36,4 % | 7,8 % | 27,4 % | 20,6 % |
|---|---|---|---|---|---|
| | $Ge^{76}$ | $Ge^{74}$ | $Ge^{73}$ | $Ge^{72}$ | $Ge^{70}$ |
| $GeH_4^+$ | 80 | 78 | 77 | 76 | 74 |
| $GeH_3^+$ | 79 | 77 | 76 | 75 | 73 |
| $GeH_2^+$ | 78 | 76 | 75 | 74 | 72 |
| $GeH^+$ | 77 | 75 | 74 | 73 | 71 |
| $Ge^+$ | 76 | 74 | 73 | 72 | 70 |

2) $GeH_2^+$. Ce potentiel peut être déterminé à partir des courbes d'ionisation relatives aux masses 78, 74 et 72. La fig. (6) montre certaines courbes obtenues, elles indiquent un potentiel d'apparition inférieur de 2 volts à celui de $GeH_3^+$.

En outre la courbe relative à la masse 78 présente une cassure à 12,3 v., indiquant l'apparition d'un autre processus de formation. D'autre part en maintenant la tension des électrons inférieure à 12,3 volts, on observe en chauffant au dessus de 300° le tube de pyrex situé en aval du capillaire une augmentation considérable de l'intensité de l'ion de masse 78, ce qui met en évidence la présence de radicaux libres $GeH_2$ dûs à la dissociation thermique. Il est donc logique d'interpréter comme suit les résultats : le potentiel d'ionisation du radical $GeH_2$ est de 10,3± 0,4 volts et le potentiel d'apparition de l'ion $GeH_2^+$ formé par bombardement électronique à partir de $GeH_4$ est de 12,3 ± 0,4 volts.

Il est à noter que le même phénomène n'a pu être décelé pour l'ion $GeH_3^+$, ce qui semble indiquer que le radical $GeH_3$ a soit une probabilité de formation négligeable soit un temps de vie très court comme radical ou comme ion. La différence des deux potentiels mesurés permet d'estimer à (2+4,5)eV l'énergie nécessaire pour rompre les deux liaisons Hydrogène, soit 3,25 eV environ par liaison.

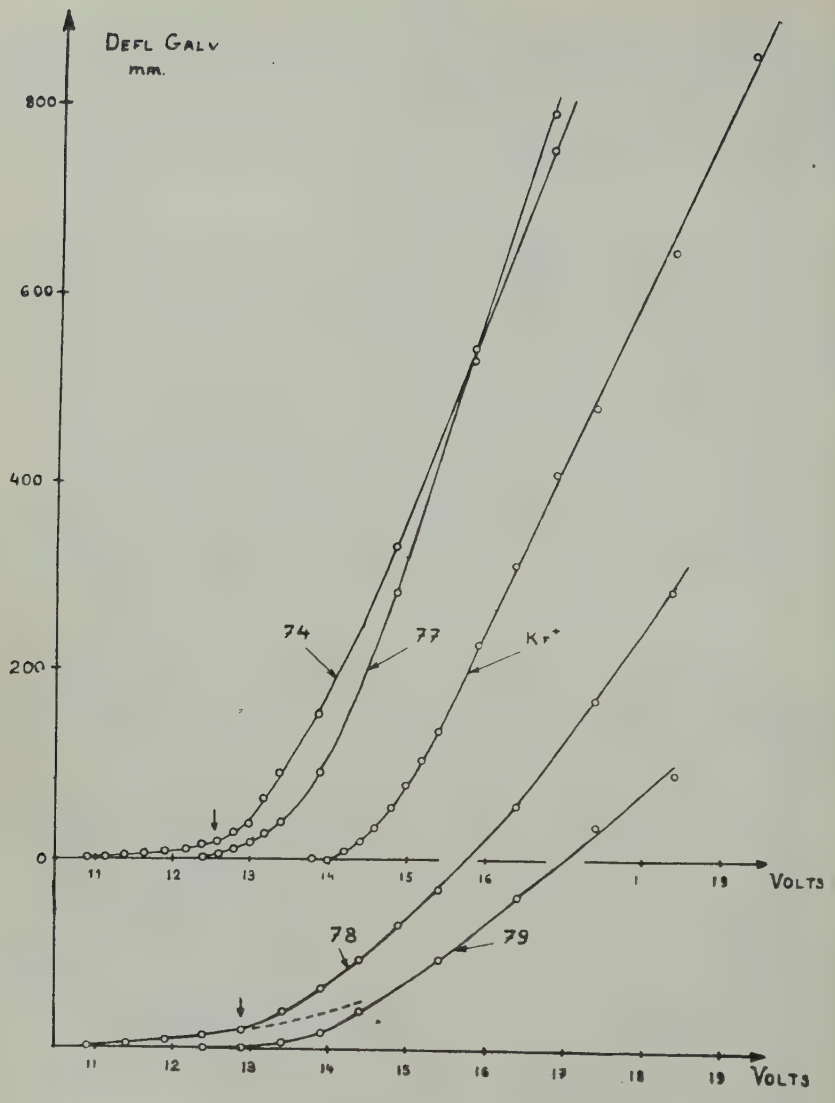



FIG. 6

3) Ge $H^+$. Ce potentiel d'apparition ne peut être déterminé avec exactitude qu'à partir de la courbe d'ionisation de l'ion de masse 71. Vu la faible intensité de cet ion, la mesure est assez imprécise. On obtient comme potentiel d'apparition $15{,}0 \pm 0{,}8$ volts. De même que pour l'ion Ge $H_3^+$, nous n'avons pas observé de dissociation thermique.

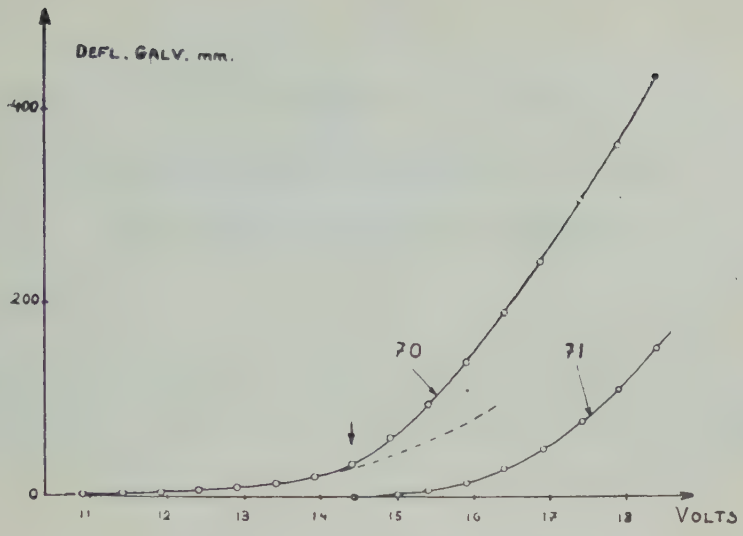



FIG. 7

4) $Ge^+$. La courbe d'ionisation de l'ion de masse 70 est représentée à la fig. 7. Elle montre une cassure aux environs de 14,5 v. ce qui semble être le potentiel d'apparition de $Ge^+$ formé à partir de $GeH_4$, le début de la courbe étant dû aux atomes Ge produits par dissociation thermique. Ce fait est confirmé par l'expérience suivante : aux énergies électroniques inférieures à 10 v., on ne distingue plus que des ions aux masses 76, 74, 73, 72 et 70, dont les abondances relatives sont celles des isotopes du Germanium.

*Conclusions.* Il résulte de cette analyse que la dissociation thermique intervient de façon non négligeable dans les phénomènes étudiés. Les abondances relatives des fragments moléculaires ne sont donc pas uniquement provoquées par le bombardement électronique.

La valeur de I ev. attribuée à l'énergie de liaison des deux premiers atomes d'Hydrogène n'est qu'une première estimation. Elle dépend de la précision des mesures des deux potentiels d'apparition de $GeH_2^+$.

De nouvelles mesures sont actuellement en cours pour préciser ces importants renseignements.

Nous remercions l'I.R.S.I.A. qui, par l'octroi d'une bourse de spécialisation, a contribué à la réalisation de ce travail.

Centre de Physique Nucléaire de Louvain.

# Quelques phénomènes rares dans les émulsions photographiques exposées au rayonnement cosmique

Sommaire. — On signale quelques phénomènes de désintégration nucléaire sous l'action du rayonnement cosmique, enregistrés dans des émulsions photographiques Ilford G. 5 et C. 2 exposées en montagne : étoiles doubles, captures et désintégrations de mésons, captures de protons, gerbes et transparences.

Nous avons exposé à la station scientifique du Jungfraujoch en Suisse et à l'Observatoire du Pic du Midi en France des plaques photographiques pour études nucléaires. Les émulsions utilisées étaient de production Ilford.

Le type C. 2 est très peu sensible aux électrons mais à toute autre particule ionisante possédant une énergie cinétique inférieure à la moitié de son énergie de masse. Le type G. 5, actuellement utilisé presque exclusivement pour les études cosmiques est sensible au passage de toute particule ionisante même lorsque son pouvoir d'ionisation est minimal.

Nous tenons à signaler quelques phénomènes rares que nous avons observés lors de la prospection de ces plaques.

## I. Les étoiles doubles

Nous signalons trois désintégrations nucléaires dont un des fragments de désintégration produit une nouvelle désintégration nucléaire. La première est un phénomène pour lequel il est possible de déterminer l'étoile primaire et l'étoile secondaire et de se faire une idée de la masse de la particule intermédiaire. Cette détermination est basée sur la variation de la densité de grain au long de la trajectoire de cette particule intermédiaire et les conclusions ne valent donc que pour autant que cette variation est réellement due à la variation du pouvoir ionisant de la particule. L'émulsion utilisée est du type C. 2. La distance entre les centres des deux désintégrations

FIG. 1

FIG. 2

est de 350 microns. Un calcul de probabilité montre que l'on peut pratiquement exclure l'hypothèse de deux étoiles à liaison fortuite.

Le second phénomène, dans une émulsion C. 2, consiste en deux désintégrations distantes de 30 microns. Une première étoile compte au moins 17 branches, parfois disposées dans un même plan vertical dont 8 sont fort épaisses et dont les autres sont dues à des particules très énergétiques ou fort légères. On peut certainement attribuer cette désintégration à un noyau lourd de l'émulsion : Ag, Br ou Iode. A côté se voit une étoile à quatre branches dont l'une est peu ionisante. Les centres des deux étoiles sont joints par une trace épaisse, à laquelle il est impossible d'attribuer un sens et par conséquent on ne peut indiquer la désintégration primaire et la désintégration secondaire.

Le troisième cas, dont la photographie est donnée en fig. 1 montre, dans une émulsion G. 5, une étoile avec 12 trajectoires fortement ionisantes et un méson sortant de cette étoile, qui après 750 microns entre dans un noyau qui se désintègre avec trois morceaux visibles dans l'émulsion. On remarque aussi une trajectoire verticale (A) qui aboutit au noyau de la désintégration primaire et qui, au minimum d'ionisation, pourrait bien être la trajectoire de la particule cosmique qui a provoqué la désintégration.

### II. Captures de mésons

A côté du cas de la capture par un noyau d'un méson émis au cours d'une désintégration nucléaire on rencontre diverses captures de mésons par des noyaux. Le scattering du méson vers la fin de sa trajectoire peut être très important : nous avons observé deux déviations de 100° durant les 20 derniers microns du parcours.

### III. Captures de particules lourdes

Un cas de capture a retenu notre attention car la particule incidente entre dans l'émulsion par l'air et y parcourt 3600 microns puis provoque une désintégration nucléaire. Le sens de cette trajectoire est nettement indiqué. La longueur du « range », la lente variation de la densité de grain et le faible scattering excluent la possibilité d'un méson. Toutes ces données s'accordent, au contraire, à attribuer à cette particule la masse d'un proton, entrant dans l'émul-

sion avec une énergie cinétique supérieure à 32 Mev. Le noyau atteint par cette particule s'est désintégré en trois morceaux.

### IV. Désintégration de mésons

Nous donnons à la fig. 2 une photographie d'un méson $\pi$ se désintégrant en un méson $\mu$ qui, à son tour, se désintègre en émettant un électron assez rapide.

Nous avons aussi observé un certain nombre de désintégrations de méson $\mu$ : on y voit des émissions d'électrons rapides et aussi d'électrons lents.

### V. Transparences

Signalons aussi des phénomènes où une particule incidente semble traverser le noyau en y étant ralentie et en excitant celui-ci d'une façon telle qu'il se produise une évaporation superficielle de quelques nucléons, sans désintégration explosive. Mr Leprince-Ringuet a observé des phénomènes semblables qu'il a qualifiés de « transparence ».

Deux de nos observations se rapportent à une particule fortement ionisante qui semble provoquer dans chaque cas l'émission de trois fragments. La trajectoire de la particule excitatrice est bien rectiligne dans le plan horizontal mais présente une petite variation de pente à sa traversée du noyau.

Une dernière observation est celle d'une étoile à six branches dont deux sont dans le prolongement exact l'une de l'autre. La première de cette paire semble entrer dans l'émulsion en venant du verre; elle a une densité moyenne de grain de 0,57 par micron pour un parcours de 340 microns. L'autre sort dans l'air après 130 microns; elle a une densité moyenne de 1,02. Par rapport au verre la pente de l'une est de 10 % et celle de l'autre de 26 %. Enfin d'un même côté de la ligne droite formée par ces deux trajectoires et dans le sens de la particule la moins énergétique l'étoile comporte aussi quatre trajectoires fortement ionisantes.

Nous recherchons un plus grand nombre de ces phénomènes pour pouvoir conclure à l'existence éventuelle de ces phénomènes de transparence qui nous révéleraient ainsi l'existence d'interactions nucléaires extrêmement brèves où l'on ne pourrait plus parler de la formation d'un noyau complexe au sens habituel du terme.

VI. Gerbes

Signalons enfin la production de gerbes de particules. L'une (fig. 3) comporte neuf particules fortement ionisantes réparties à peu près symétriquement dans tous les azimuths et neuf particules de grande énergie, à faible pouvoir d'ionisation. Cinq d'entre elles sont groupées dans un angle de 31° et trois autres constituent un nouveau faisceau étroit, voisin du premier, de sorte que ces particules forment une sorte de gerbe unique. Dans le sens opposé à l'axe de cette gerbe une neuvième particule est dirigée verticalement.

On sait que ces phénomènes sont attribués à des processus en cascade. Le rayon primaire réagirait d'abord sur un certain nombre

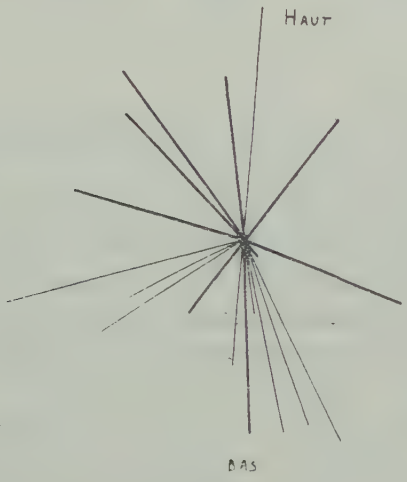



Fig. 3

de nucléons et provoquerait l'émission de mésons et d'électrons de transformation de ces mésons. Lorsque l'énergie s'est communiquée à l'ensemble des nucléons du noyau celui-ci subit une « évaporation ». La plaque dans laquelle ce phénomène a été trouvé n'a que 200 microns d'épaisseur : il ne nous a pas été possible de suivre les trajectoires des particules formant cette gerbe sur une longueur suffisante pour déterminer s'il s'agit d'électrons ou de mésons.

Une autre gerbe (fig. 4) du même genre est formée de huit particules à grand pouvoir d'ionisation et de neuf particules énergétiques.

Les premières sont réparties en deux groupes de trois et un groupe de deux particules. Ces groupes sont orientés approximativement

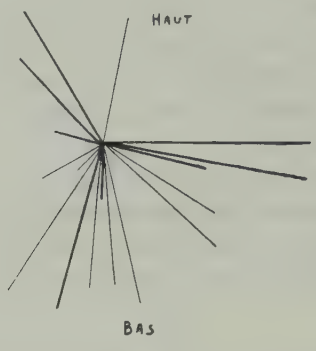



FIG. 4

à 120° l'un de l'autre. Deux des particules ont un range de 1000 et de 2400 microns. Ce sont des protons. Quant aux particules énergétiques, huit d'entre elles sont aussi groupées en trois faisceaux étroits de 15 à 28° qui sont associés dans une gerbe de 119°. L'axe de cette gerbe fait un angle de 3° environ avec la direction verticale. Chacun de ces groupes contient une particule deux fois plus ionisante que les autres, mais comme on ne décèle aucun scattering et que la variation de densité de grain est inappréciable, il est impossible de déterminer avec certitude leur nature, enfin une neuvième particule, comme dans le cas précédent, est émise verticalement.

Nous tenons à remercier la Direction de la Station Scientifique du Jungfraujoch qui nous a rendu possible l'exposition des plaques en altitude ainsi que le Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles qui s'est chargé d'exposer certaines plaques au Pic du Midi.

L. GILLON, F. GILLAIN et A. MELIN,
Centre de Physique Nucléaire de Louvain. Octobre 1950.

## TABLE DES MATIERES


Session du 26 janvier 1950, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

PAGES

A propos du tranchet d'Archimède, par M. V. Thébault ..... 5

Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables, par M. F. Ceschino ..... 13

Quelques propriétés des matrices H, par M. M. Parodi ..... 22

Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre (suite et fin), par M. R. Germay ..... 26

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

La récession des nébuleuses extra-galactiques (5e partie), par M. P. Drumaux ..... 31

Session du 27 avril 1950, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Points et droites remarquables du tétraèdre, par M. V. Thébault .... 39

Sur les triangles autopolaires des polarités planes, par M. R. Ballieu 48

Fonctions de Bessel et calcul symbolique, par M. P. Humbert ..... 55

Sur les équations récurrentes, aux différentielles totales, complètement intégrables, par M. R. Germay ..... 62

Sur la différentielle totale, par M. Ch. de La Vallée Poussin ..... 74

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Constitution du Bureau de la Section ..... 76

Application des méthodes de la mécanique céleste au problème de Störmer, par M. G. Lemaître ..... 76

Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques. La pénombre au voisinage de l'équateur, par M.R. De Vogelaere ..... 83

Sur certains systèmes pancratiques, par M. A. Biot ..... 93

Sur une unité absolue de quantité de couleur et son emploi, par M. A. Biot 111

Transformation graphique des coordonnées colorimétriques, par A. Biot 115

Equipement électronique des jauges à vide de la machine de Van de Graaff de Louvain, par MM. G. Tavernier et Y. Hecq ..... 120

Session du 26 octobre 1950, à Louvain.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

PAGES

Sur les points de Steiner et de Tarry, par M. V. Thébault ..... 131
Sur les groupes de parties d'un demi-groupe, par M. R. Ballieu ..... 139
Les solutions infiniment voisines des équations récurro-différentielles, par M. R.H. Germay ..... 148
Sur une propriété de certains polynômes d'Appell, par M. F. Ceschino 154
Sur une méthode de résolution de certaines équations intégrales dont le noyau est une fonction irrationnelle, par M. M. Parodi ..... 156
Sur l'équation différentielle de la fonction de Bessel du troisième ordre, d'indices nuls, par MM. P. Humbert et P. Delerue ..... 160
Sur une généralisation de la transformation de Hankel, par M. R.P. Agarwal ..... 164

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

La récession des nébuleuses extra-galactiques (6e partie), par M. P. Drumaux ..... 169
Contribution à l'étude du spectre Raman de la molécule $CD_3$-$CD_2H$, par MM. R. Van Riet et M. de Hemptinne ..... 177
Etude au spectromètre de masse de la décomposition du Germane sous l'influence du bombardement électronique, par MM. M. Nève de Mévergnies et J.M. Delfosse ..... 188
Quelques phénomènes rares dans les émulsions photographiques exposées au rayonnement cosmique, par MM. L. Gillon, F. Gillain et A. Melin ..... 196
Table des Matières du tome 64e ..... 201

## AUTEURS

R.P. Agarwal, 164. — R. Ballieu, 48, 139. — A. Biot, 93, 111, 115. — F. Ceschino, 13, 154. — P. Delerue, 160. — J.M. Delfosse, 188. — R. De Vogelaere, 83. — P. Drumaux, 31, 169. — R. Germay, 26, 62, 148. — F. Gillain, 196. — L. Gillon, 196. — Y. Hecq, 129. — M. de Hemptinne, 177. — P. Humbert, 55, 160. — Ch. de La Vallée Poussin, 74. — G. Lemaître, 76. — A. Melin, 196. — M. Nève de Mévergnies, 188. — M. Parodi, 22, 156. — G. Tavernier, 129. — V. Thébault, 5, 39, 131. — R. Van Riet, 177.

## DATES DE PUBLICATION

1er et 2e fasc. pp. 1 à 130, 22 juin 1950.
3e fasc. pp. 131 à 202, 11 décembre 1950.

7200 Louvain — Etabl Ceuterick, s. c., 66, rue Vital Decoster.

# Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série.**

La revue fut interrompue par la guerre, après la deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANCAIS.

*Administration et Rédaction* : **11, rue des Récollets, Louvain (Belgique).**

PRIX D'ABONNEMENT :

| | |
|---|---|
| Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg | **200 francs belges** |
| abonnement de soutien ..... | **500 francs** |
| abonnement d'honneur ..... | **1000 francs** |
| France et colonies françaises (s'adresser au Centre du Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7e) | **800 francs franç.** |
| Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)..... | **280 francs belges** |

# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES**, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **150,00**

**TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES**,
t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. **20,00**
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. **40,00**

**ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES**,
Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. **70,00**
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. **70,00**
Série C (sc. médicales) 1927 et 1928) fr. **100,00** — (1929 à 1933) fr. **40,00**
(1931 à 1936) fr. **20,00**
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. **20,00** – (1930) fr. **60,00**
(1931 à 1936) fr. **100,00**
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXIV (1937 à 1950) fr. **70,00**
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. **70,00**
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940,46) fr. **100,00**

**REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES**,
t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. **200,00**
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. **60,00**
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . fr. **200,00**
Le fascicule . . . . . fr. **40,00**
t. CXVII (1940 et 1946). tt. CXVIII à CXXI (1947 à 1950) Le volume fr. **200,00**
Le fascicule . . . . . fr. **60,00**

**TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.**
t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. **20,00**
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. **20,00**
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. **30,00**

**MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES**

I. — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. **24,00**; autres pays, **30,00** fr.

II. — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays fr. **30,00**.

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont.** — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan horstexte (1939) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30.00**. (épuisé)

**MONOGRAPHIES MÉDICALES**

I. — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. **70,00** ; autres pays, fr. **90,00**.

III. — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. **24,00** ; autres pays, fr. **30,00**.

**MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES**

I. — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . fr. **20,00**

II. — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . fr. **10,00**

III. — **A. Delpérée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . **fr. 60,00**